Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo

quaderni IRRSAE LOMBARDIA 13

a cura di
PIETRO CANETTA
CARLO FELICE MANARA
MARIO MARCHI

Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo

INDICE

PRESENTAZIONE

Secondo Aristotele i giovani, a cagione della loro inesperienza e della loro dipendenza dalle passioni, sono «cattivi ascoltatori» di discorsi di politica, mentre sono buoni ascoltatori di discorsi di matematica, perchè questa prescinde dalla complessità delle cose concrete e perchè procede con precise dimostrazioni.

Noi sappiamo che le cose non stanno esattamente in questo modo e non solo per i giovani, ma anche per gli adulti. Le difficoltà non vengono solo dalla complessità dell'esperienza e dal controverso móndo dell'opinabile, ma anche dall'astrattezza e dal rigore che son propri della matematica. Le famose «due culture», la umanistica e la scientifica, sono certo frutto di eredità storiche e di pregiudizi, ma sono anche frutto di diversi stili cognitivi e di diversi metodi pedagogici, che hanno a che fare in ultima analisi con le specifiche difficoltà dei rispettivi oggetti, metodi e linguaggi.

Poichè l'uva troppo alta viene di solito definita acerba, si sono visti i campioni delle due culture gloriarsi delle rispettive ignoranze e screditare l'oggetto del loro desiderio frustrato.
Dietro queste più o meno abili mascherature degli insuccessi stanno sofferenze talora profonde di ragazzi in crisi di fronte alla pagina bianca, non importa se a righe o a quadretti, dato che gli incubi vengono in alcuni a causa dei temi, ad altri dei problemi.
Ciò che per alcuni rappresenta un bosco da esplorare o un campo da coltivare, per gli altri è una selva inestricabile o un arido deserto.

La matematica in particolare è per i suoi seguaci limpida, evidente, rassicurante, mentre per i suoi nemici è inafferrabile, oscura, minacciosa. Questi prescindendo dalle sensazioni e dagli effetti si sentono perduti e costretti entro un mondo privo di umanità, quelli si sentono finalmente liberi dalle sabbie mobili dell'opinione e protetti dall'armatura delle deduzioni e dalla potenza dei simboli.

Una disciplina che non ammette errori, che punta all'eleganza dell'essenziale, che propone in continuazione problemi da risolvere, non può non generare qualche ansia, anche nei più provveduti: per gli altri può rappresentare addirittura quel simbolo delle permanente minaccia di retrocessione intellettuale e sociale che rende la scuola nemica e la vita inquieta.

Poichè dunque l'ignoranza matematica non si può considerare solo frutto di fatalità biologica o magari di singolare virtù spirituale, l'impegno per il miglioramento dell'insegnamento/apprendimento della matematica non va inteso come impresa disperata o come concessione al cognitivismo e allo scientismo tornati in auge, ma come una forma di servizio estremamente qualificata allo sviluppo della personalità dei ragazzi.

Come la lingua madre così il linguaggio matematico esercita un ruolo strategico nello sviluppo della vita intellettuale, affettivo etico e professionale dei giovani. Ecco perchè, nell'ambito dei programmi di ricerca-azione sui curricoli continui, l'IRRSAE attribuisce particolare importanza al lavoro sulla educazione matematica, che si spera ottenga lo stesso successo che è toccato al quaderno sull'educazione linguistica.

I nuovi programmi della scuola media e della scuola elementare offrono l'occasione per un ripensamento dell'oggetto e del metodo del sapere matematico e non solo per una messa a punto della didattica della matematica.

Si tratta insomma, per gli insegnanti della «scuola elementare e media», di rifare i conti sia con la matematica, sia col proprio modo d'insegnarla, in occasione dell'uscita dei recentissimi programmi della scuola elementare.

La natura dell'impresa ci è parsa tale da giustificarne la mole del volume che qui si presenta, la fatica che è costato ai ricercatori e ai curatori e il sacrificio che costerà l'acquistarlo.

L'itinerario suggerito riguarda anzitutto l'esplorazione delle caratteristiche della matematica colta nelle sue articolazioni concettuali, nei suoi procedimenti, nel suo linguaggio, nel suo significato: non solo per consentire approfondimenti teorici, ma per trovare il modo di scoprire e di far scoprire ai ragazzi i segreti del modo di pensare matematico.

La seconda parte del volume approfondisce le caratteristiche della ricerca didattica, la terza presenta concrete proposte di curricolo, quali si sono costruite sulla base di un'esperienza in aula, a cui hanno collaborato più di quaranta insegnanti elementari e medi della Lombardia.

Non essendo possibile prendere in considerazione tutti gli aspetti della «matematizzazione del reale», secondo l'indicazione dei nuovi programmi elementari e medi, gli autori si sono limitati a condurre l'esperienza su quattro argomenti, affidati ad altrettanti gruppi di lavoro: si tratta dell'aritmetica, della geometria, delle grandezze e misure, della logica matematica.

I gruppi sono stati coordinati rispettivamente dalle professoresse Giacomello, Bresciani, Carlotti, Landenna. Ne emerge un ricco materiale di lavoro che utilizza anche i quaderni degli alunni, attraverso il quale si manifestano le fasi di evoluzione del ragionamento matematico, dall'osservazione del «dato sensibile» che costituisce il «concreto di partenza», alla «elaborazione fantastica», alla «schematizzazione», alla «rappresentazione formale».

Particolarmente utile risulterà a molti il suggerimento didattico sotteso alla presentazione dei «problemi stimolo». Si tratta di quesiti che hanno lo scopo di esercitare l'alunno in situazioni problematiche, in cui vien messa alla prova l'apparente evidenza della risposta più immediata e in cui si mette l'allievo in grado di verificare direttamente, con semplici operazioni, la bontà della propria ipotesi di soluzione.

Un glossario esplicativo delle parole meno note o più dissimili dall'uso del linguaggio comune consente infine di superare alcune difficoltà di comprensione. Il volume che ne risulta vorrebbe essere guida, stimolo e repertorio per l'insegnamento della matematica nella scuola di base.

Sia consentito ringraziare vivamente tutti i docenti impegnati in questa avventura intellettuale ed educativa, a cominciare dai professori Manara, Canetta e Marchi che sono stati animatori e registi dell'impresa.

Vorrei ricordare con particolare gratitudine il collega Carlo Felice Manara, che già come consigliere dell'I.R.R.S.A.E. aveva offerto all'Istituto il contributo della sua signorile arguzia e del suo buon senso lombardo. Per singolare coincidenza questo volume esce quando Manara va tecnicamente «fuori ruolo», lascia cioè la sua cattedra di istituzioni di geometria superiore nell'Università di Milano.
Con la gratitudine per quanto ha fatto per la cultura e per la scuola italiana gli esprimiamo l'augurio che continui ancora, con il suo esempio e con il suo prestigio, a battersi per il miglioramento della didattica nella scuola.

Luciano Corradini
Presidente dell'IRRSAE Lombardia

INTRODUZIONE

A chi segua con attenzione critica e legittime aspettative l'attività dell'IRRSAE non è forse sfuggito quanto a più riprese esplicitato nelle pagine del Bollettino (n. 3 e 15), nell'introduzione al Documento 3 e al Quaderno 10 («Per un curricolo continuo di educazione linguistica») ed infine in quella al Documento 16 («Per un curricolo di educazione matematica») a proposito di una delle linee significative di ricerca che l'Istituto si è dato: quella dell'esplorazione sistematica, in dimensione curricolare, delle aree disciplinari in cui si articola l'insegnamento nella scuola dell'obbligo, con forte attenzione a quanto possibile già nella scuola materna e con proiezione su quel biennio, nonostante ogni remora legislativa, naturale continuazione dell'obbligo.

La ricerca di una continuità curricolare è apparsa ben più che una soluzione possibile al problema degli snodi e dei raccordi tra ordini di scuole, come la strategia ottimale per coniugare l'epistemologia della disciplina — di volta in volta oggetto di ricerca — con la psicologia dell'apprendimento in quell'età evolutiva che più di ogni altra pone esigenze di continuità.

Che poi questa coniugazione, proprio perchè rispettosa di epistemologia disciplinare e scansioni psicologiche, sia risultata fondante una corretta metodologia didattica ha ulteriormente confermato l'ipotesi sottesa all'intera linea di ricerca per curricoli disciplinari continui.

Si aggiunga la modalità di ricerca adottata: costante interazione tra ipotesi formulate da équipe di specialisti e ricercatori di base (docenti di scuole elementari e medie) e fase operativa di verifica sul «territorio» oggetto, quest'ultima, di lettura e riflessione critica da parte di tutti gli operatori per una continua ridefinizione di obiettivi e strategie.

L'ampia diffusione del Documento n. 16 (la 1ª edizione è esaurita ma si prevede di ristampare un numero di copie adeguato), contenente i materiali teorici ed operativi prodotti durante il primo anno della ricerca, autorizza a ritenere vivo il livello delle aspettative e stimolanti le proposte finora elaborate.

Il Quaderno n. 13, che contiene una sintesi dell'intera ricerca biennale, mentre non riduce l'interesse per il Documento che più ampiamente dà conto dell'itinerario e offre più spazio ai prodotti intermedi, ne sintetizza i contenuti, le proposte ulteriori, le linee di sviluppi conseguenti ed i nuovi materiali elaborati.
Il quaderno esce con un qualche ritardo, sulla tabella di marcia prevista, per la complessità dei problemi presentati: rispettare al massimo la connotazione di ciascuno degli ambiti in cui la ricerca si è articolata, senza peraltro perdere di vista l'impianto complessivo della ricerca stessa; coniugare l'ampiezza ed il rigore della trattazione teorica con le mediazioni didattiche postulate dalla verifica sul campo; conservare al meglio l'autenticità dei «prodotti» intervenendo su di essi solo quando richiesto da esigenze editoriali.

Sulla non presunzione di esaustività della ricerca si dà conto in altra parte. Essa testimonia della serietà di chi ha inteso commisurare il proprio intervento con i tempi e le forze disponibili come pure connotare l'impostazione a scelte ritenute qualificanti.

Ciascuna ricerca peraltro è per sua natura incompiuta soprattutto quando essa ha per oggetto ciò che è possibile e bene fare nella scuola dove lo sviluppo inarrestabile del sapere interagisce con le dinamiche dell'età evolutiva, del modificarsi delle strutture, della legislazione, delle richieste del sociale. Ai colleghi che accoglieranno il presente lavoro l'invito è a considerarlo proposta da verificare e sviluppare.

E fin qui le riflessioni sull'accaduto. Ora le proposte di impiego del prodotto.

L'IRRSAE ha avuto modo di collaudare sia modalità di diffusione degli esiti di ricerche disciplinari sia le loro modalità di finalizzazione alla formazione sul lavoro dei docenti, linea quest'ultima ritenuta ormai vincente su quella dell'aggiornamento a pioggia così dispersivo e frustrante.

Dopo una fase di Convegni sul tema della ricerca in oggetto, fase prevista per i primi mesi del nuovo anno scolastico (86/87) destinati a presentare il «prodotto» ed aprire su di esso un ampio confronto, seguiranno momenti seminariali in cui tutti gli operatori della ricerca saranno invitati a socializzare l'intero ventaglio delle esperienze, enuclearne le linee più significative ed elaborare una proposta di loro utilizzo ai fini della formazione sul campo dei colleghi del settore. Si prefigura, in analogia a quanto già in atto per l'educazione linguistica (primo ambito disciplinare esplorato dalla ricerca IRRSAE nell'arco della scuola elementare e media con prossima pubblicazione dei risultati della ricerca nell'ambito della materna), la formazione di una equipe di docenti disponibili ad animare più vasti gruppi misti di docenti elementari e medi motivati a verificare in proprio la validità delle linee di curricolo contenute nei vari prodotti e sperimentarne sul campo ogni possibile espansione e superamento.

La diffusione, ed ancor più lo sviluppo così ipotizzato, degli esiti della ricerca connotano una concezione nuova dell'«aggiornamento» in quanto consentono ai docenti di inserirsi da protagonisti ed in termini teorici ed operativi ad un tempo in un processo di verifica e dilatazione degli ambiti della ricerca stessa.

I docenti hanno in più occasioni rivendicato il loro diritto ad una formazione in servizio che li renda protagonisti di una innovazione non più procrastinabile al di là delle pur lodevoli dichiarazioni di principio espresse dagli interventi legislativi recenti e di quelli futuribili.

La collocazione provinciale delle équipe di animatori di ricerca e innovazione riduce notevolmente il disagio non più sostenibile di una partecipazione di docenti ad operazioni culturalmente significative concentrate nel capoluogo di regione e per ciò stesso incompatibili spesso con impegni di lavoro, orari di treni, diritto alla fruizione del proprio tempo libero.

Dopo la conclusione della ricerca biennale «Per un curricolo continuo di educazione linguistica» e di quella «Per un curricolo continuo di educazione matematica» l'Istituto ha dato alle stampe nel Documento n. 23 i risultati del 1° biennio di ricerca «Per un curricolo continuo di educazione scientifica». Prevede la pubblicazione del quaderno sullo stesso tema entro i primi mesi dell'87. I colleghi che gestiscono la cattedra di educazione matematica in particolare, ma certo non loro soltanto, saranno interessati alla notizia.

Nel congedare il testo che rappresenta un livello di impegno e di sacrificio da parte di quanti vi hanno lavorato pienamente valutabile solo da chi conosca sulla sua pelle il significato del fare ricerca in condizioni normative e retributive assolutamente scoraggianti, unisco, al grazie espresso dal Presidente, quello mio ai Proff. Canetta, Manara e Marchi, ai conduttori dei gruppi Proff, Bresciani, Carlotti, Giacomello, Landenna e, singolarmente, a ciascuno dei colleghi ricercatori di scuola elementare e media.

Un grazie particolare al Prof. D'Alfonso, collega della Sezione Scuola Media, che ha curato gli aspetti oeganizzativi della ricerca e la presentazione grafica ed editoriale del testo al quale ha aggiunto con mano felice la suggestione di una copertina stimolante ed evocativa.

Fausta Perucci Monelli
Responsabile Sezione scuola media dell'IRRSAE Lombardia

PREMESSA

§ 1. QUALE MATEMATICA PER IL CURRICOLO

Il lavoro per lo studio di un *curricolo continuo di matematica* per le scuole elementari e medie inferiori si articola sostanzialmente attorno all'idea fondamentale che considera l'insegnamento della matematica come un mezzo per dare ai discenti certe idee e certi strumenti espressivi; questi, a loro volta, sono destinati a permettere la conoscenza razionale e critica del mondo e della realtà, in modo da costituire il punto iniziale per una conoscenza scientifica.

In questa luce, il punto di partenza è costituito sostanzialmente dalla presentazione di un aspetto della matematica: precisamente l'aspetto secondo cui questa scienza assume il carattere di un linguaggio, che man mano si arricchisce con l'ampliarsi delle conoscenze degli alunni e quindi con il crescere delle loro necessità di espressione.

In modo abbastanza approssimato si potrebbe dire che l'orizzonte dei contenuti che gli allievi debbono dominare parte dagli insiemi finiti, conosciuti e dominati attraverso l'aritmetica elementare, passa attraverso le grandezze continue, conosciute e dominate con i numeri razionali, fino a giungere alla logica ed agli strumenti per padroneggiare il comportamento umano in condizioni di informazione incompleta, e quindi in condizioni soggettive di incertezza.

Tuttavia i contenuti di un curricolo cosiffatto, pur impqrtanti per dare agli alunni gli elementi delle conoscenze utili per la vita civile, non sono tanto importanti come lo spirito con il quale essi andrebbero presentati: tale spirito dovrebbe condurre ad una metodologia d'insegnamento secondo la quale si parte dalla realtà, da osservare e rappresentare, per giungere alla costruzione dei linguaggio simbolico adeguato a questa realtà, ed infine alla presentazione ed allo studio della sintassi di tale linguaggio, sintassi che — nel caso in esame — si riduce all'apprendimento ed alla applicazione delle leggi dell'aritmetica dei numeri interi e dei numeri razionali.

Quando si accetta questo punto di vista, si è spontaneamente condotti a non adottare l'altra strada, che porterebbe a presentare le strutture formali prima dei contenuti dai quali esse prendono occasione di esistenza; analogamente appare chiaramente poca saggio il pretendere che l'allievo impari delle frasi prive di senso, come la definizione di numero (!) o addirittura la definizione della matematica (!); invece, lasciando da parte ogni astrazione che non sarebbe apprezzata dai discenti, le leggi della sintassi dei simboli dovrebbero nascere dalle proprietà dei contenuti, conosciute con le esperienze elementari quotidiane.

Nulla vieta che, in secondo stadio, tali proprietà elementari siano precisate con opportune proposizioni iniziali, che forniscono i punti di partenza della deduzione e costituiscono il succedaneo concreto degli assiomi di una teoria.

In questo cammino, che parte dalla osservazione per giungere alla sistemazione logica e alla deduzione rigorosa, la geometria si presenta come uno dei momenti fondamentali del processo formativo dell'alunno; invero questa scienza potrebbe giustamente essere considerata come il primo capitolo della fisica, intesa etimologicamente come conoscenza con mezzi razionali del mondo che ci circonda.

In particolare la geometria presenta il vantaggio di porgere occasione all'esercizio della fantasia creatrice (che viene sottoposta al controllo della ragione e della esperienza) e di non richiedere l'impiego di simboli artificiali per la rappresentazione dei propri oggetti e per le deduzioni.

Va infine ricordato che la matematica è in stretto collegamento con la logica, tanto se si intende questo termine nel senso abituale, di teoria della deduzione, quanto se esso viene preso nel senso di dottrina del comportamento coerente. Nel primo senso è chiaro che il calcolo matematico è da sempre un esempio ed un germe della deduzione formale, quale è studiata nella logica simbolica moderna. Se si prende nel secondo senso, appare chiaro che la utilizzazione della matematica e dei suoi strumenti permette di trarre il massimo di certezze da informazioni incomplete, e quindi permette il massimo di coerenza possibile nelle decisioni in condizioni di incertezza e questo è il punto di partenza del calcolo delle probabilità.

§ 2. UNA PROPOSTA DIDATTICA

Con la concezione della matematica che abbiamo ora esposta, abbiamo affrontato il compito che l'IRRSAE LOMBARDIA ci ha affidato in ordine ad una ricerca e alla progettazione di un curricolo di educazione matematica per la scuola dell'obbligo.

Lasciamo agli studiosi di materie pedagogiche e psicologiche accurate definizioni ed elaborazioni delle nozioni di *curricolo* e di *continuità*. Ciò che qui ci interessa è proporre delle chiavi di lettura della disciplina matematica che siano significative per i docenti della scuola dell'obbligo. Tali chiavi di lettura, poi, non nascono da una elaborazione astratta della disciplina, ma sono state suggerite e verificate da una attività sperimentale immersa nella quotidiana pratica scolastica. Intendiamo offrire, in questo modo, agli insegnanti che ci leggeranno, indicazioni su diversi itinerari con cui è possibile avvicinare lo spirito del pensiero matematico in modo da appropriarsene ed essere quindi in grado di trasmetterlo ai propri allievi. Caratteristica comune di questi itinerari proposti è la *continuità evolutiva* che parte delle esperienze e intuizioni più elementari e primordiali, per giungere all'aspetto formale che è proprio della matematica, a qualsiasi livello culturale la si consideri.

Vorremmo ora brevemente spendere alcune parole riguardo alla *portata innovativa* dei documenti che qui presentiamo. La lunga esperienza di lavoro con gli insegnanti, maturata in questi anni da chi ha diretto la presente ricerca, ci ha convinti che non sempre *innovazione* vuol dire *fare* o *proporre di fare* cose nuove, insegnare contenuti nuovi; innovazione significa invece, in modo profondo e vitale, contribuire alla novità che, ogni giorno, ogni insegnante si deve portare in classe.
Il contributo, che noi riteniamó veramente essenziale per la Scuola italiana, non è inventare nuovi argomenti di insegnamento o nuove tecniche di somministrazione didattica, sempre più sofisticate; ciò che importa è aiutare gli insegnanti ad essere, ognuno di loro, intimamente nuovo, aiutarli a presentare, con spirito ed entusiasmo sempre rinnovati, l'essenza della loro disciplina ai ragazzi; contribuire a far sì che gli insegnanti siano in grado di approfondire sempre di più le radici e i significati della loro disciplina. Crediamo infatti che non c'è un limite al *capire* sempre meglio e sempre più a fondo, ciò che *si conosce* o, peggio, si *crede* di conoscere!

Per queste ragioni riassumiamo il nostro impegno di lavoro nella presente ricerca, dicendo che non vogliamo proporre una matematica nuova, nè un nuovo modo di insegnare la matematica. Vogliamo invece contribuire ad approfondire i significati e la portata scientifica, culturale, educativa, della matematica stessa e portare questa novità nel cuore di chi ci legge.

§ 3. ANALISI DELLA RICERCA

In modo coerente alla impostazione precedentemente illustrata, abbiamo dato ampio spazio nel presente volume alla presentazione di diverse esperienze didattiche concrete, illustrate nella loro globalità: dagli obiettivi programmatici, agli itinerari didattici seguiti, alla documentazione del prodotto didattico ottenuto, costituita dai documenti grafici elaborati dagli allievi. Tutto questo è contenuto nella PARTE TERZA del volume, dedicato appunto all'aspetto sperimentale della ricerca che abbiamo condotto. Questa ricerca è stata condotta da quattro gruppi di lavoro, guidati ognuno da un insegnante facente parte del gruppo di studiosi che ha accettato di assumere il compito affidatoci dall'IRRSAE Lombardia. Ogni gruppo ha lavorato autonomamente su un proprio tema, ma avendo sempre di vista quella particolare chiave di lettura della disciplina matematica di cui si è parlato nel § 1, e cioè, *la matematica intesa come linguaggio*. All'approfondimento delle implicazioni conoscitive e didattiche di questo particolare aspetto della matematica saranno dedicati i capitoli 1 e 2 della parte prima del volume.

I quattro gruppi di lavoro hanno affrontato quattro argomenti nodali nell'ambito della impostazione culturale della matematica che stiamo qui sottolineando; precisamente: *insiemi numerici*, *geometria*, *grandezze e misure*, *introduzione alla logica* (intesa come analisi del pensiero non ambiguo). Le ragioni di questa scelta di argomenti didatticamente qualificanti, anche se certo non esaustiva dall'intero programma di matematica della scuola dell'obbligo, sono illustrate e approfondite nella parte seconda del volume. Basta qui ripetere che ciò che ci interessa è offrire un modello propositivo di come sia possibile realizzare, nella pratica didattica concreta, quell'itinerario di accesso alla matematica che ci preme studiare e diffondere. In particolare, a proposito dei curricoli che sono stati stilati dai vari gruppi, vogliamo sottolineare che il lettore attento troverà in queste esperienze soprattutto del materiale didattico già sperimentato, che gli sarà poi possibile utilizzare nel proprio lavoro, in modo indipendente e personale.

La PARTE SECONDA del volume è dedicata, come si è già accennato, ad un approfondimento dei principi didattici sui quali chi scrive ritiene vada impostata una azione di educazione matematica che voglia, da una parte essere rispettosa sia della matematica che degli allievi, e dall'altra possa raggiungere quegli obiettivi educativi, formativi e anche addestrativi (per quanto è indispensabile!) da tutti cercati e auspicati, Programmi Ministeriali compresi. La parte seconda si presenta dunque, ad un tempo, come il quadro programmatico in cui la ricerca (i cui risultati sono poi presentati nella parte terza) si è svolta e anche come griglia di lettura dei risultati ottenuti nella ricerca stessa. È opportuno a questo proposito ricordare che il procedimento didattico non può ricalcare pedissequamente la scansione logica degli argomenti ed è quindi naturale che alla nozione di curricolo inteso come pura sequenzialità di argomenti e obiettivi si sovrapponga quella di curricolo inteso come itinerario di accesso didattico e di appropriazione culturale della disciplina oggetto di studio.

La ricerca sperimentale della parte terza e la sua chiave di lettura contenuta nella parte seconda, poggiano su una precisa analisi disciplinare e di tipo metodologico-didattico riguardante i capitoli della matematica elementare presi in esame. Alcuni documenti essenziali di questi fondamenti culturali di base sono riportati, per completezza di esposizione e comodità del lettore, nella PARTE PRIMA del volume.

Pietro Canetta
Carlo Felice Manara
Mario Marchi

PARTE PRIMA

I documenti concettuali

1 PER UN CURRICOLO DI EDUCAZIONE MATEMATICA

CARLO FELICE MANARA

1. L'insegnamento della matematica nelle scuole elementari e medie dell'obbligo potrebbe essere facilitato qualora si cercasse di avere di questa scienza un'idea che ne chiarisce la natura e guidi così alla strategia didattica.

Pare a noi che una delle caratteristiche della matematica che più si adatta all'ispirazione di strategie didattiche sia quella che la accosta all'aspetto di linguaggio. Un linguaggio che ha sue peculiari proprietà delle quali parleremo subito ma che sostanzialmente pone dei problemi di alfabetizzazione e di insegnamento che sono abbastanza analoghi a quelli dell'insegnamento di una lingua.

2. Osserviamo anzitutto che a livello elementare (quello a cui ci poniamo ora) la matematica viene sostanzialmente utilizzata per descrivere certe realtà esterne all'osservatore, e per dedurre delle conseguenze dalle operazioni e dalle osservazioni eseguite.

Questa osservazione è confortata dalla nascita del numero cardinale naturale, che trae la sua origine dall'operazione di contare (insegnata ai bambini in modo operativo e non ovviamente teorico) e che traduce, in concetti prima e poi in simboli, la relazione di equipotenza tra insiemi finiti di oggetti concreti.

Quindi il primo momento della costruzione del numero è quello dell'esecuzione (anche in modo inconscio ed informale) di un certo raffronto tra insiemi finiti, che porta alla costruzione di un concetto astratto.

Anche nella letteratura matematica moderna, che pare si diletti nella costruzione di denominazioni complicate e sofisticate, è stato mantenuto l'aggettivo «naturale» per questa specie di numeri.

Insieme con il primo momento di costruzione dei concetti incontriamo però anche il primo momento espressivo: infatti nella scuola, insieme con la guida alla concettualizzazione del numero naturale, quasi sempre viene anche data la manovra dei mezzi espressivi verbali, almeno per i primi numeri della serie naturale. Addirittura questo insegnamento fa parte della prima alfabetizzazione, e, presso le nazioni che oggi si dicono civili, nelle rispettive lingue si incontrano delle parole che esprimono almeno i primi dieci interi naturali.

Osserviamo tuttavia che i due momenti (della costruzione del concetto e della espressione) pur essendo quasi contemporanei, almeno per tutti i giovani delle nazioni che hanno il nostro sistema scolastico, non sono tuttavia da confondersi. Per poter sottolineare la distinzione fra i due vorremmo ricordare che per es. un pastore, analfabeta di ritorno, sarebbe sempre autorizzato a rappresentare le pecore che escono dall'ovile con i sassi di un mucchio, in modo da poter la sera controllare se le pecore sono rientrate tutte oppure no. Ovviamente nella testa di questo soggetto esiste il concetto di corrispondenza biunivoca, ma la rappresentazione simbolica del numero naturale è fatta materialmente (in modo rudimentale ma chiaro) e non verbalmente, perchè il nostro pastore si è felicemente dimenticato delle lezioni della maestra, che gli sono state impartite molti anni prima.

3. Potremmo dire che fino a questo punto l'apprendimento della numerazione non presenta sostanziali differenze dall'apprendimento dei vocaboli della lingua materna, che aiutano il bambino nella concettualizzazione, cioè nella costruzione di concetti generali che fondano

un inizio di classificazione (anche esteriore e talvolta poco fondato) delle cose e delle persone che lo circondano.

Anche l'introduzione della scrittura dei numeri fino a questo punto va di pari passo con l'apprendimento della scrittura dei simboli linguistici, perchè il bambino impara certi ghirigori elementari, che per lui sono analoghi alle lettere dell'alfabeto, e che rappresentano i primi numeri naturali. La divaricazione incomincia però subito dopo, perchè occorre insegnare al bambino le convenzioni posizionali della nostra rappresentazione grafica dei numeri, e la lettura di tali rappresentazioni.

È vero che, anche per la scrittura di parole, esistono delle convenzioni di scrittura e di pronuncia; ed è vero che il bambino deve imparare a decifrare il messaggio verbale e tradurlo nella scrittura, ed a decifrare il messaggio scritto e tradurlo in messaggio verbale e concettualizzarlo (rispettivamente questi momenti corrispondono al «dettato» ed alla «lettura»).

Tuttavia possiamo osservare che le difficoltà dell'apprendimento dei due tipi di linguaggio incominciano a diversificarsi, perché nel caso della lingua materna il bambino è immerso nella vita di tutti i giorni, in cui deve adoperare questi mezzi espressivi. Particolari difficoltà possono insorgere quando la lingua parlata a casa (il dialetto) è diversa dalla lingua scolastica; ma ciò non toglie il fatto che la maestra parli sempre la stessa lingua per comunicare con lui, e anche per spiegargli le regole del simbolismo matematico.

E ciò sottolinea la differenza tra il linguaggio «naturale» della lingua materna e l'artificialità del simbolismo matematico.

Da questo punto in avanti il divario tra l'apprendimento di una lingua naturale (materna) e quello della matematica cresce sempre di più, ponendo problemi peculiari all'insegnamento di quest'ultima.

4. Per quanto l'insegnamento della matematica presenti, come abbiamo visto, delle sue precise problematiche, possiamo tuttavia osservare che la linea direttiva dovrebbe essere quella segnata dalla natura di mezzo espressivo (linguaggio) che la matematica possiede in questa luce e da questo punto di vista. Si traggono infatti dall'osservazione alcune regole abbastanza banali, ma pure interessanti: invero si osserva che il linguaggio naturale si impara con l'uso; in altre parole il bambino, quando comincia a parlare per fare delle comunicazioni che hanno un aspetto intellettuale (e non soltanto comunicare sensazioni o emozioni) lo fa parlando «..., di qualche cosa».

Si spiegano quindi in questa luce le raccomandazioni che i tecnici della pedagogia fanno anche per l'insegnamento della matematica: andare dal concreto all'astratto e utilizzare il linguaggio matematico anzitutto per «dire qualche cosa». All'inizio la cosa potrebbe non presentare grandi difficoltà, ma la artificialità del linguaggio matematico rende difficile la «cifrazione» dei messaggi e la loro «decifrazione»; rende cioè difficile la scrittura dei numeri mediante le convenzioni posizionali e rende difficile la lettura dei numeri scritti.

Una ulteriore difficoltà, che si presenta qui per la prima volta, ma che si presenterà sempre in seguito, è data dal fatto che la lingua naturale possiede sempre un certo grado di ridondanza; in altre parole, si può parlare male, sgrammaticato, ma si riesce in qualche modo a farsi capire. La mancanza di mezzi espressivi corretti è fonte di alienazione sociale e stabilisce spesso una specie di graduatoria nella accettazione dell'individuo nel gruppo sociale a cui egli vorrebbe appartenere. Si ricordi per esempio le difficoltà degli emigranti e dei loro figli, il cui inserimento nella nuova società è reso difficile e spesso difficilissimo dalla mancanza di strumenti di comunicazione sociale. Ma — ripetiamo — le lingue naturali sono spessissimo ridondanti, per cui il messaggio, se pure scorretto, è tuttavia ricevuto, anche se spesso parzialmente ed a spese di punizioni di tipo sociale (emarginazione, alienazione, ecc.).

Nel caso della matematica, ogni errore, anche minimo, di cifrazione o di decifrazione rende inutile il messaggio o addirittura trasmette delle informazioni deformate, incomprensibili o scorrette.

Incontriamo qui una delle grandi difficoltà che fermano molte intelligenze, del resto anche vive e brillanti, alle soglie della matematica. Pensiamo infatti che vi siano molte intelligenze anche non disprezzabili, che tollerano male la convenzionalità e soprattutto la assoluta rigidità della sintassi del linguaggio matematico; molti soggetti quindi che dichiarano di «...non aver mai capito la matematica» semplicemente sono allergici alle convenzioni artificiali e si sentono soffocare dalle regole espressive troppo rigide.

Ma si può anche osservare che questo aspetto, che rende difficile per molti la matematica è anche uno dei costituenti del suo valore formativo; perchè l'impiego di una lingua precisissima richiede chiarezza di idee e precisione di espressione. Quindi l'insegnamento della matematica ritrova il suo valore formativo come correttivo dell'andazzo delle idee confuse e delle espressioni equivoche. La celebre frase sulle «convergenze parallele» non potrà mai esser pronunciata da un matematico, perchè è fatta per confondere le idee e non per chiarirle o per comunicarle agli altri.

5. Abbiamo osservato che l'inizio dell'insegnamento della matematica dovrebbe seguire la strada che è percorsa dall'apprendimento della lingua materna: quella cioè che porta dal concreto al simbolo, e che presenta la lingua parlando di «qualche cosa» e non solo come un insieme di regole espessive. Del resto è ben noto che anche quando si voglia insegnare una lingua diversa dalla materna l'esercizio costituisce un momento non sopprimibile; perchè tutti sanno che si può conoscere a memoria la grammatica di una lingua e non saperla parlare per mancanza di esercizio sufficiente.

È chiaro tuttavia che questo è soltanto il momento iniziale dell'apprendimento di un linguaggio; un secondo momento ha luogo quando il linguaggio stesso viene fatto oggetto di studio a sè, quando se ne studiano le regole e si cerca in qualche modo di giustificarle e di fondarle. Infatti nessun linguaggio naturale è assolutamente «casuale», ma ognuno traduce in qualche modo lo spirito del popolo che lo parla, la sua razionalità, la sua cultura, intesa come modo di porsi razionalmente di fronte al mondo ed alla storia.

Pertanto anche per la matematica dovrebbe venire il momento dello studio delle regole. Tuttavia, per questo linguaggio, il momento delle regole di impiego e manipolazione viene molto presto, con la presentazione delle «operazioni» sui numeri.

Nel caso della matematica elementare il procedimento di presentazione è spesso il seguente: esistono delle operazioni sugli insiemi concreti finiti, che il discente conosce; per es. la riunione materiale di due insiemi che non hanno elementi comuni. Il discente conosce anche (non in modo formalmente esplicito ma praticamente) alcune proprietà formali di queste operazioni concrete; per es. il discente è convinto del fatto che in un insieme che nasce dalla riunione di due insiemi finiti e disgiunti non dipende dall'ordine in cui i due insiemi sono presi in considerazione e manipolati concretamente. Cioè conosce praticamente la proprietà commutativa dell'operazione logica di riunione dei due insiemi. Analoghe considerazioni possono essere fatte a proposito delle altre proprietà delle operazioni sugli insiemi concreti finiti, che sono quelli da cui il discente è partito per costruire il concetto di intero naturale. Ora queste proprietà delle operazioni concrete che il discente (a torto o a ragione non importa qui analizzare) conosce o crede di conoscere, debbono essere espresse con operazioni sui concetti e soprattutto tradotte in regole per manipolazione dei simboli che esprimono i concetti. Qui la situazione è complicata dal fatto che le operazioni debbono essere eseguite mediante quei simboli artificiali di cui si diceva prima, e che già suscitano delle allergie in alcuni soggetti.

6. In questo momento la matematica ci si presenta con un nuovo aspetto, molto importante; precisamente dal punto di vista di *strumento deduttivo*, cioè di un insieme di operazioni concettuali (tradotte poi in operazioni sui simboli) che permettono di conoscere la realtà prima che l'esperimento ci dia conferma della validità della nostra conoscenza. Così per es. se si

fanno confluire nell'aula magna di una scuola due classi, l'una di 21 scolri e l'altra di 24, il direttore sa che si troveranno nell'aula magna 45 scolari, prima ancora di contarli. L'operazione del conteggio serve non per verificare la validità delle operazioni dell'aritmetica, ma eventualmente soltanto per verificare se qualche scolaro non se la sia svignata. In altre parole la operazione aritmetica ci dà una deduzione di cui noi siamo assolutamente certi, e che riguarda il risultato della operazione di unione di due insiemi disgiunti: se di qua erano 21, e di là erano 24, allora *devono* essere 45. Ed in questa parola «devono» è espressa ovviamente la certezza del direttore che la deduzione da lui fatta è assolutamente certa.

Da questo punto di vista quindi la matematica ci si presenta come una «logica perfezionata» (come diceva G. Peano); cioè come un insieme di strumenti concettuali e espressivi i quali permettono di fare delle affermazioni assolutamente certe a partire da altre accertate (oppure accettate ipoteticamente come certe).

È questa circostanza il fondamento del successo della matematizzazione della scienza moderna, cioè della adozione di strumenti deduttivi che non lasciassero dubbi sulla validità delle deduzioni.

È da osservarsi tuttavia che queste operazioni (o, in generale, queste manipolazioni dei simboli che permettono la deduzione) sono pure soggette a regole rigidissime; regole espressive, anzitutto, e poi regole operative. Si tratta qui di un secondo momento dell'impiego di un linguaggio; il momento che consiste nel passaggio dalla pura espressione dei concetti alla formazione di concetti nuovi, in conseguenza delle relazioni prima espresse e codificate.

Anche qui si potrebbero ripetere le considerazioni fatte sopra al n. 4: le regole che reggono la deduzione sono rigidissime, e portano alla deformazione del messaggio e alla sua vanificazione qualora se ne trasgredisca anche una sola.

Osserviamo tuttavia che uno dei vantaggi della matematica è il fatto che le regole sono — per così dire — meccaniche; la loro applicazione può essere affidata alle macchine, la verifica dei procedimenti costituisce una operazione puramente formale, in cui non vi è nulla da «capire».

7. Col crescere dell'età del discente cresce anche il campo di interessi e il numero delle cose del mondo esterno che debbono essere conosciute e utilizzate. Così dalla manovra degli insiemi concreti aventi un numero finito di elementi, che richiede l'impiego degli interi naturali, si passa alla manovra delle grandezze continue, che richiede l'impiego dei numeri razionali, anzi addirittura, in teoria, dei numeri reali.

Ovviamente con la necessità di nuovi mezzi conoscitivi ed espressivi crescono le difficoltà di comprensione e crescono le difficoltà didattiche. Tuttavia pensiamo di poter dire che i momenti elementari, che pongono le difficoltà principali, teoriche e didattiche, rimangono quelli che abbiamo enumerati in precedenza, identificandoli nella concettualizzazione, utilizzazione del mezzo espressivo (codificazione e decodificazione), manipolazione dei simboli ubbidendo a determinate leggi sintattiche.

È inutile ricordare qui le difficoltà e anche gli equivoci a cui dà luogo la costruzione di nuovi mezzi espressivi e la loro manipolazione. Tra i tanti, ricordiamo che nella maggior parte dei casi invece che di «numeri razionali» si parla di «frazioni» e, separatamente, di numeri decimali, confondendo così, nella pratica didattica, il concetto unico di numero razionale con le sue varie rappresentazioni, che vengono spesso concepite come oggetti di «magie» differenti, e riservate ai soli iniziati.

Effettivamente spesso si dimentica che il numero razionale è rappresentaro da infinite frazioni, e che soltanto la comodità di calcolo o anche una vecchia mania dei maestri e dei professori costringe la gente a ridurre le frazioni ai minimi termini.

Questa operazione, di riduzione ai minimi termini, non è altro che una tecnica per scegliere in modo canonico un rappresentante del razionale nella classe di equivalenza di infinite frazioni che lo rappresentano tutte legittimamente; e non vale la pena di farne oggetto di esercizi particolarmente estenuanti.

Ulteriori difficoltà sono date dalla abitudine di utilizzare la rappresentazione decimale per i razionali; convenzione che porta a dover rappresentare con simboli infiniti (i numeri periodici) oppure di dover operare con i numeri approssimati non appena il razionale da rappresentare non sia di un tipo molto particolare.

La situazione è ulteriormente complicata dalla diffusione delle macchine elettroniche tascabili, le quali pongono problemi che andrebbero meditati accuratamente.

8. Nel campo delle grandezze continue, la intuizione geometrica fornisce a nostro parere i contenuti più interessanti ed importanti per la didattica e per la introduzione dei concetti e dei simboli. Sappiamo infatti che storicamente la geometria ha costituito lo strumento espressivo fondamentale per la matematica fino al secolo XVI. Non si vuole far ritornare indietro la storia della matematica, ma soltanto si vuole che la intuizione spaziale non venga sacrificata in favore di un formalismo che presenta tante difficoltà per molte persone.

Invero per tante persone, anche colte, le «frazioni» richiamano alla memoria un incubo, rappresentano le Colonne d'Ercole delle loro conoscenze matematiche e del maneggio dello strumentario della matematica.

Occorrerebbe invece poter sfruttare al massimo i contenuti della geometria, per rispettare i criteri didattici di cui abbiamo già detto. Inoltre la geometria con i suoi oggetti costituisce il secondo passo fondamentale (dopo quello riguardante gli insiemi finiti) della matematizzazione della realtà esterna, cioè dell'impiego di un linguaggio convenzionale, preciso e rigoroso, per la conoscenza della realtà del mondo; quindi la geometria fornisce un'occasione utile per far capire ai discenti il significato della matematizzazione della conoscenza, che è uno dei momenti fondamentali della scienza moderna.

9. L'operazione principale con la quale si esegue la codificazione numerica delle grandezze continue viene chiamata — come è noto — operazione di «misura».

Sappiamo che questa operazione avviene quotidianamente ed è il fondamento anche della vita civile: gli alimenti, le stoffe, l'energia, i servizi vengono spesso contabilizzati mediante questa operazione: quindi non soltanto le grandezze della geometria (lunghezze, aree, volumi) o della meccanica (tutte le precedenti ed il tempo) e della fisica (comprese le grandezze elettriche, magnetiche e quelle del calore con esclusione della temperatura) sono oggetto di misura, ma anche quasi tutte quelle della vita civile, o meglio quelle che sostituiscono il contesto materiale della vita civile.

Ne consegue che l'insegnante accorto potà quotidianamente sottolineare *l'isomorfismo* tra le operazioni concrete sulle grandezze e quelle che si eseguono sui numeri che ne danno la codificazione. È questa una delle circostanze fondamentali che giustificano la matematizzazione della conoscenza; dovrebbe fare da filo conduttore per tutto il «curricolo» elementare della matematica: l'idea cioè che la *codificazione della realtà con i simboli matematici costituisce uno strumento di conoscenza perchè i concetti ed i simboli riproducano* (a loro modo, ed al proprio livello) *le proprietà ed i comportamenti della realtà materiale e concreta che osserviamo e che manipoliamo tutti i giorni.*

10. Una delle proprietà principali che viene attribuita abitualmente da noi alle grandezze della vita comune e della fisica è la continuità. Essa viene rilevata con l'osservazione sulle grandezze della geometria, e viene supposta valida anche per le grandezze della fisica macroscopica classica.

È noto che la espressione rigorosa e ineccepibile della proprietà di continuità è stata conseguita soltanto verso la fine del secolo scorso, quando si è ottenuta contemporaneamente anche una teoria rigorosa dei numeri reali; prima di questa epoca, le proprietà che scendono dalla continuità erano considerate come «intuitive»; e su una supposta «intuizione» erano anche fondate molte dimostrazioni dell'analisi matematica classica, dell'epoca dei fondatori.

Ovviamente anche nella geometria euclidea vi sono delle proprietà che sono affidate alla intuizione: per es. in Euclide si trovano delle costruzioni con il compasso che presuppongono certe proprietà del trasporto dei segmenti che D. Hilbert formulò rigorosamente mediante opportuni assiomi. Una di queste costruzioni è basta sul fatto ovvio che, data una circonferenza K, ogni altra circonferenza, che abbia un punto fuori ed uno dentro la K, interseca la K stessa: analoga osservazione può essere fatta a proposito delle intersezioni della K con una retta r che abbia almeno un punto interno alla K stessa.

Non è compito dell'insegnamento elementare della matematica il colmare queste lacune logiche: invero il postulato di continuità della retta, come viene presentato nei corsi della scuola media superiore (e forse anche all'università) non viene spesso compreso nel suo significato e nelle sue motivazioni, soprattutto perchè pare che enunci una proprietà che appare «evidente» alla nostra osservazione.

Tuttavia pensiamo che possa essere utile svolgere qualche considerazione in proposito, osservazione che potrebbe anche avere qualche riflesso sulla didattica.

Infatti nella pratica scolastica abituale l'operazione di misura di una grandezza porta quasi sempre alla espressione della misura sotto forma decimale; oppure — per le presentazioni più sofisticate — in una base qualunque (per esempio nella base 2, che fonda anche le convenzioni di misura anglosassoni, in cui per esempio si misurano le lunghezze in pollici, metà, quarti, sedicesimi di pollice...).

Pensiamo che anche a questo livello si possa trovare modo di fare osservare che, supponendo valida la proprietà di continuità della materia, in linea di principio la operazione potrebbe proseguire in qualche caso senza aver mai fine; questa operazione porterebbe a far corrispondere ad una grandezza, alla scelta di una unità di misura ed a quella di una base di numerazione, un simbolo infinito, formato da una successione anche infinita di cifre.

Si potrebbe allora osservare che ad un simbolo cosiffatto corrisponde una ed una sola grandezza; questa è l'osservazione che D. Hilbert propone di sostituire all'enunciato rigoroso e generale dell'assioma di continuità, e che lo sostituisce a tutti gli effetti, almeno a livello elementare, quando si prescinde dalle difficoltà logiche che nascono dal concetto di «simbolo infinito».

La diffusione delle macchine calcolatrici tascabili permette poi di verificare direttamente le proprietà delle operazioni su numeri che esprimono delle misure approssimate di certe grandezze, e quindi permette di insistere sull'aspetto di «matematica ragionevole» che dovrebbe avere l'insegnamento di questa scienza. Infatti la matematica non può creare le informazioni che si posseggono e ogni manipolazione su misure incerte introduce ulteriori elementi di incertezza ed errore nelle informazioni che si deducono con operazioni aritmetiche.

2 LA MATEMATICA COME LINGUAGGIO

CARLO FELICE MANARA - MARIO MARCHI

§ 1. IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA

Si è soliti caratterizzare ogni disciplina per i suoi contenuti, per gli oggetti di cui si occupa, e si è poi anche soliti osservare che ogni disciplina ha, di conseguenza, un suo PROPRIO LINGUAGGIO, che dipende, che è il risultato quasi, della NATURA degli OGGETTI che studia e dei METODI utilizzati nella investigazione.

Vediamo quanto e come questa analisi è adattabile alla matematica. Bisognerebbe allora prima di tutto individuare i suoi contenuti: quali possono essere gli OGGETTI DI STUDIO della matematica? La domanda sembra a prima vista quasi banale e retorica: «la matematica, anzi — se vogliamo essere più precisi — l'aritmetica è la scienza dei numeri, la scienza della quantità», così si potrebbe rispondere, e ancora: «la geometria è la scienza dello spazio, la scienza della forma». Queste risposte, che sembrerebbero essere il naturale inizio di una corretta analisi sui contenuti propri della matematica, racchiudono invece nel loro interno il germe di un profondo travaglio che ci porterà alla fine, inaspettatamente, al risultato opposto a quello per il quale sembravano essere preordinate. È infatti spontaneo chiedersi a questo punto: se la matematica studia i numeri, le quantità, lo spazio, le forme, ebbene, cerchiamo di dare una precisa nozione degli enti che siamo abituati ad individuare con questi termini verbali. Ci accorgiamo allora subito che, anche se ognuno dei vocabili *numero*, *quantità*, *spazio*, *forma* (e con essi tanti analoghi e anche più tecnici come *insieme*, *propietà*, *uguaglianza* etc.) evocano in noi delle immagini mentali ben precise, essi sfuggono tuttavia ad una definizione univoca e autosufficiente. In altre parole, ogni definizione che noi tentassimo di queste parole sarebbe necessariamente fatta ricorrendo ad altri concetti, od altri termini che andrebbero a loro volta definiti facendo ancora ricorso a nuovi concetti, fino ad un inevitabile circolo chiuso. D'altra parte, per individuare queste nozioni di cui la matematica si interessa, non è applicabile neppure la soluzione caratteristica delle scienze sperimentali, che consiste nell'ostensione fisica degli oggetti di studio, univocamente individuati attraverso opportuni e ben precisi esperimenti.

Siamo allora a questo punto: la matematica sembra avere come oggetto di studio dei contenuti ben precisi di cui noi siamo in grado di farci una idea per analogia o con immagini mentali fantastiche, ma che alla fine risultano invece sfuggire ad ogni tentativo di definizione precisa. È ovvio, a questo punto, che se non si riesce a definire in modo soddisfacente i contenuti della matematica, risulterà una impresa ben difficile da affrontare quella di caratterizzare il suo linguaggio, cioè l'insieme delle espressioni con cui di questi contenuti si dovrebbe predicare.

La situazione problematica e apparentemente contraddittoria che abbiamo delineato non è un gioco intellettuale, frutto di una mania rigorista e massimalista di qualche studioso avulso della realtà e immerso solo nel suo mondo astratto, fatto di sillogismi e astrazioni. Ciò a cui abbiamo accennato è niente altro che il punto di partenza, un poco stilizzato e romanzato, di quella crisi dei fondamenti della matematica, che, risolta, ha portato al concetto moderno non solo di matematica, ma, più in generale, di scienza.

La crisi dei fondamenti della matematica, iniziata storicamente con la scoperta delle geometrie non euclidee da parte di BOLYAI e LOBACEVSKIJ all'inizio del secolo scorso, ha coinvolto via via tutti i rami della matematica: dopo la crisi dei fondamenti della geometria è stata la volta dei fondamenti dell'aritmetica, con KRONEKER prima e poi PEANO, poi dei fondamenti razionalizzati e formalizzati della teoria degli insiemi e infine delle basi logiche stesse su cui la matematica è costruita, con la nascita della logica formale.

Ciò che vi è di comune in tutte queste crisi, e nel modo con il quale sono state superate, è l'aver avviato e maturato l'evoluzione della matematica da scienza di contenuti a scienza di strutture. Il famoso problema del V postulato di Euclide, sul quale i matematici hanno lavorato per 20 secoli, nasceva dalla domanda se il suo enunciato doveva ritenersi abbastanza evidente, oppure doveva essere dedotto da un'altra proposizione più elementare. Per 20 secoli non si è avuto alcun dubbio che l'esistenza di una e una sola parallela ad una retta assegnata, passante per un dato punto, corrispondesse alla *realtà* esistenziale: era *evidente* che fosse così. Il problema era solo quello di esprimere questa *verità* nel modo più adeguato. La rivoluzione portata dalla scoperta delle geometrie non euclidee è consistita nello sperimentare in modo costruttivo che era possibile costruire edifici logici ineccepibili, sia sull'assunto dell'unicità della parallela, sia basandosi al contrario su una delle possibili negazioni di tale ipotesi. Veniva meno in questo modo la coincidenza tra i concetti di verità ed evidenza; il ricorso alla realtà esterna, o almeno a come essa ci appare usualmente evidente nella nostra intuizione, non poteva più essere considerato criterio di verità. La soluzione è stata allora trovata nel costruire la geometria come un sistema ipotetico-deduttivo, le cui basi erano costituite dagli assiomi e i cui oggetti erano semplicemente i termini primitivi definiti implicitamente dagli assiomi scelti. Da questo punto di vista l'unico criterio di *verità* diventa allora la *non-contradditorietà* del sistema di assiomi scelto come fondamento della teoria.

Non diversa è l'avventura dell'aritmetica. Il concetto di numero intero, basilare per la costruzione di tutti gli altri insiemi numerici, era stato, fino alla metà del secolo scorso, dato come intuitivo. Quando si è cercato di definirlo in modo preciso ci si è accorti che vi erano solo due possibilità. Una era quella di definirlo (non diversamente dalle nozioni geometriche) in modo implicito, attraverso un opportuno sistema di assiomi. Si trattava, cioè, non di dire cos'è un numero intero, ma di affermare che si può chiamare numero intero un qualunque oggetto che si comporta secondo determinate regole (gli assiomi, appunto). Il sistema di assiomi che definisce per questa via gli *interi naturali* è dovuto a G. PEANO (1889). L'altra via percorribile era quella di cercare di definire i numeri a partire da altre nozioni ritenute più *primordiali*, come ad esempio la *nozione di insieme.* Anche questo tentativo non ha mancato però di riservare le sue sorprese. L'idea iniziale più spontanea è stata quella di assumere la nozione di insieme come intuitiva, quasi come se fosse proposta dall'esperienza di una realtà oggettiva; è questa la cosiddetta *teoria ingenua degli insiemi,* che si può fare risalire a G. CANTOR (1874). F.L.G. FREGE ha tentato, basandosi sulla nozione di equipotenza tra insiemi, di costruire il concetto di numero intero naturale, ma è finito in tal modo in un trabocchetto molto ben nascosto: l'ammissione implicita dell'esistenza di un insieme mostruoso e contraddittorio, l'*insieme di tutti gli insiemi.* Si deve a B. RUSSEL l'aver messo in evidenza questo vicolo cieco, in cui, una volta ancora, la fiducia nell'evidenza di una realtà esterna come criterio di verità, aveva portato il pensiero matematico. Che fare allora? Anche la teoria degli insiemi andava fondata su un complesso di assiomi, doveva cioè diventare un sistema ipotetico-deduttivo, per poter essere attendibile. E anche la nozione, pur così spontanea, di insieme, non poteva che essere definita implicitamente attraverso gli assiomi basilari della teoria. Si deve a ZEMERLO e a FRAENKEL la prima strutturazione di una siffatta teoria degli insiemi.

La matematica modernamente intesa si presenta dunque come una dottrina i cui contenutio non sono desunti dalla realtà sensibile e non godono quindi di una loro propria natura, per così dire, *oggettiva.* Gli oggetti di cui la matematica predica sono ridotti a puri termini primitivi a cui è semplicemente richiesto di soddisfare determinate regole di comportamènto: tali regole vengono dette appunto *gli assiomi* della teoria. Sul complesso di questi assiomi esiste un solo vincolo: la non-contradditorietà, e questo è l'unico criterio di verità che abbia senso porre all'interno dell'edificio matematico.

La teoria matematica si sviluppa poi deducendo, passo dopo passo, conseguenze logiche derivate dagli assiomi fondamentali, cioè dalle regole formali, dalle operazioni che è lecito compiere tra i termini primitivi. Accade così che il vero contenuto della matematica non risultano più i suoi termini primitivi (cioè gli enti geometrici come i punti, le rette, le figure, oppure i numeri naturali, oppure gli insiemi, e così via) ma le regole con cui si opera su essi. La matematica assume così l'aspetto di una scienza che è caratterizzata dalle procedure piuttosto che da certi oggetti studiati in sè e qualificanti come tali la dottrina. La matematica si presenta in definitiva come una specie di linguaggio, convenzionale e dalle regole sintattiche rigorosissime.

§ 2. LA MATEMATICA COME LINGUAGGIO

Questa fisionomia della matematica, intesa come linguaggio, pone rilevanti problemi didattici per tutte le classi di età. Ne esaminiamo qui di seguito alcuni.

a) Osserviamo prima di tutto che, da questa impostazione, nasce naturale una tentazione, alla quale, in verità, alcune moderne correnti di ricerca didattica hanno ceduto. Si argomenta: «se la matamatica è un linguaggio basato su poche nozioni astratte e generalissime, la via didattica più diretta non può che essere quella di presentare subito ai discenti queste idee generali e logicamente semplici, deducendo poi da esse come casi particolari tutti gli aspetti più concreti della disciplina». Questa impostazione è stata particolarmente approfondita per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, che si è voluto da certi autori (si pensi per es. ad un Dieudonné) derivare completamente, come semplice caso particolare, da determinate strutture algebriche molto generali, come quelle di *gruppo* e di *spazio vettoriale.* Questa idea di privilegiare l'algebra rispetto alla geometria è dovuta forse al fatto che la prima confina con la logica formale e può dare quindi una particolare sensazione di rigore del ragionamento deduttivo; rigore che poteva sembrare sconosciuto ai vecchi procedimenti di ragionamento e che probabilmente è alla base dell'attuale fortuna dell'algebra cosiddetta *moderna.*

Si finisce in questo modo con il presentare delle strutture formali, per così dire, come *vuote*, che risultano poi via via da riempire con esempi e con casi concreti. Chi scrive ritiene che procedimenti di questo genere, anche se possono di fatto essere memorizzati dagli allievi, non abbiano in sè effettivi contenuti formativi. I procedimenti di apprendimento della mente umana vanno, in generale, dal concreto all'astratto, dal particolare al generale, dalla esperienza alla sua idealizzazione e formalizzazione. Di conseguenza, se si vuole arrivare a dare ai nostri allievi il gusto del ragionamento formale e astratto, che è proprio della matematica, se si vuole fare loro capire l'utilità e quasi la necessità dello strumentario della matematica modernamente intesa, occorre partire, almeno inizialmente, da elementi concreti desunti dall'esperienza della realtà esterna, per arrivare poi ad una adeguata formalizzazione attraverso un appropriato itinerario di astrazione, generalizzazione e idealizzazione.

Possiamo quindi concludere che *l'aspetto più profondo della matematica moderna non può essere semplicemente comunicato*, come una informazione tra tante altre, ma *deve necessariamente essere oggetto di conquista personale.* Ogni discente dovrà sperimentare nella propria mente l'evoluzione del pensiero matematico dal concreto all'astratto, dai contenuti alle strutture formali. Solo in questo modo potrà alla fine arrivare ad una effettiva *appropriazione* di questo linguaggio universale, disponibile per la descrizione di tutti gli aspetti della realtà, anche di quelli più inaspettati e sconcertanti.

b) Chiediamoci ora quale potrebbe essere una adeguata strategia didattica finalizzata all'insegnamento della matematica intesa come linguaggio.

Una prima osservazione è che un linguaggio, ogni linguaggio, viene appreso con relativa facilità se parla «di qualche cosa». Non avrebbe senso conoscere tutte le regole grammaticali e sintattiche di una lingua se poi non si fosse in grado di usarle per esprimere dei concetti o per descrivere qualche realtà. Allo stesso modo non si può dire di possedere la matematica, o un ramo di essa, se solo si conoscono in astratto alcuni suoi concetti e alcune regole operatorie. Si può dire di «fare matematica» solo se la si usa, se si è in grado di farla servire o di farla operare esattamente come un linguaggio che esprima determinati giudizi intorno a «qualche cosa». In conclusione si fa della matematica che si hanno dei formalismi (non importa se elementari o concettualmente avanzati, ma formalismi!) che soddisfano certe regole di comportamento e se si è capaci di operare, con questi formalismi, su determinati dati per ottenerne degli altri. In una parola: *si sta facendo della matematica solo se si è in grado di risolvere dei problemi.*

Una seconda osservazione riguarda la categoria conoscitiva propria, relativa all'apprendimento di un linguaggio. Studiare una lingua non significa accumulare informazioni su di essa, ma operare invece un processo di *appropriazione* di questo mezzo di comunicazione, facendo proprie via via le idee, i formalismi, i metodi che la caratterizzano. In sintesi: si può parlare di appropriazione del linguaggio matematico da parte del discente se egli raggiunge uno stato interiore nel quale gli strumenti concettuali e formali della matematica sono diventati una specie di scoperta personale, tali da essere usati spontaneamente e in modo quasi automatico. Pensiamo, come esempio, all'uso degli strumenti dell'aritmetica nella vita quotidiana. Questo uso non ci richiede riflessioni perchè per noi è diventato quasi automatico il procedimento di simbolizzare certi numeri con cifre e di operare poi su tali simboli secondo le regole formali a suo tempo memorizzate. È abbastanza pacifico osservare che a questo livello di appropriazione non si arriva facilmente con l'imporre le strutture formali già costruite ed astratte dalla realtà che inizialmente le ha suggerite. Al contrario occorrerà rendere coscienti gli alunni dei procedimenti logici adottati nell'uso pratico dello strumento matematico e inoltre occorrerà avviarli alla ricerca dei fondamenti (logici e formali) da cui un certo comportamento discende.

In conclusione abbiamo messo in evidenza due aspetti essenziali nell'apprendimento del linguaggio matematico. Il primo è la necessità di un *addestramento* di base che renda padroni di quegli automatismi che possono far diventare spedito e sicuro il ragionamento (pensiamo, ad esempio, alle famose «tabelline» tanto disprezzate in un passato ancora prossimo, ma ora riportate nella loro giusta posizione strumentale). Il secondo è la *formazione di una mentalità*, in modo tale che il ragionamento matematico diventi naturale e spontaneo.

c) Se in predecenza abbiamo esaminato le implicazioni didattiche derivanti dalla analogia esistente tra la matematica, intesa come *linguaggio formale* e il linguaggio ordinario, o *linguaggio verbale*, è opportuno ora sottolineare anche una profonda differenza esistente tra questi due modi di linguaggio. L'analisi di questa differenza ci permetterà anche di mettere in evidenza uno dei costituenti essenziali del valore formativo della matematica.

È facile osservazione notare come la lingua naturale possieda un elevato grado di ridondanza. Ciò significa che nel linguaggio ordinario le frasi che noi usiamo per esprimere un determinato concetto contengono sempre più parole di quelle strettamente necessarie per individuare univocamente ciò che vogliamo comunicare. Vengono di qui due conseguenze: da una parte è possibile esprimere gli stessi concetti anche con frasi molto diverse, dall'altra anche delle cospicue deformazioni di una frase (deformazione ottenute, per esempio, saltando delle parole, oppure usandole con significati errati, oppure ancora violando un certo numero di regole grammaticali e sintattiche) non è detto che alterino in modo essenziale il messaggio che si vuole trasmettere. In altre parole potremmo dire: si può parlare male, sgrammaticato, con un lessico anche molto povero, ma si riesce in qualche modo a farsi capire. La ridondanza di cui parlavamo è in parte legata, e quasi resa necessaria, dalla naturale imprecisione del linguaggio verbale ordinario. Infatti si cerca di compensare l'eventuale ambiguità di espressioni o imprecisione di termini ripetendo più volte lo stesso messaggio (o i suoi equivalenti) al fine di ottenere come risultato una individuazione univoca del concetto che si vuole trasmettere, senza possibilità di confonderlo con altri, espressi in modo analogo, ma di contenuto differente. La ridondanza della lingua naturale è però anche espressione di richezza derivante dal fatto che con l'espressione verbale si comunicano non solo concetti o stati di fatto ma anche informazioni di carattere meno circoscrivibile, come sensazioni, stati d'animo, etc.

Nel caso della matematica, invece, accade che ogni errore, anche minimo, sia nella espressione formale del linguaggio che nella sua interpretazione, rende inutile il messaggio oppure trasmette delle informazioni incomprensibili o sbagliate.

Questo fatto comporta delle profonde conseguenze. Da una parte possiamo trovare qui una spiegazione del fatto che molte intelligenze, anche vive e brillanti, trovano nella matematica delle difficoltà quasi insormontabili. Si tratta forse di intelligenze che mal sopportano la convenzionalità e la assoluta rigidità della grammatica e della sintassi del linguaggio matematico. Persone, quindi, che affermano di «non aver mai capito nulla della matematica» sono forse semplicemente allergiche alle convenzioni formali e si sentono come soffocare da regole espressive troppo rigide. Da un'altra parte, però, possiamo anche osservare che questo aspetto della matematica, che la rende per molti difficile, contiene anche uno dei costituenti più profondi e significativi del suo valore formativo. Infatti l'impiego di una lingua estremamente precisa richiede necessariamente una grande chiarezza di idee o di espressione. L'insegnamento della matematica, quindi, presenta un significativo valore formativo se utilizzato come potenziale correttivo delle espressioni equivoche, di cui la nostra quotidiana esperienza è piena.

Abbiamo toccato in questo modo un aspetto molto importante e molto delicato della matematica: parliamo di ciò che viene solitamente indicato con il termine *rigore*. Questo punto merita un momento di riflessione per sgomberare il campo da fraintendimenti e incomprensioni divenute quasi tradizionali. È abbastanza facile che nell'opinione comune la parola *rigore* venga confusa e quasi considerata sinonimo di altri termini come pedanteria, meticolosità fine a se stessa etc., termini che indicano atteggiamenti mentali solitamente non positivi e costruttivi. Può anche accadere che nell'ambito del linguaggio verbale ordinario questa identificazione abbia la sua buona giustificazione. Certamente però nell'ambito del linguaggio formale della matematica, quando si parla di *rigore* si intende tutt'altro. Per chiarire subito le cose potremmo ricordare la bellissima e lapidaria definizione che Peano dà di rigore, in matematica: «Il rigore matematico è molto semplice: esso sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere» (G. PEANO, *Sui fondamenti dell'analisi.* Bollettino della Società «Mathesis», II (1910), 31-37).

Possiamo allora concludere, da questo, che il rigore non deve essere ritenuto come una questione di specialisti, di professionisti della matematica che, si potrebbe pensare con un poco di cattiveria, «devono darsi un tono». Siamo profondamente convinti che ogni seria attività di matematizzazione, a qualsiasi livello sia compiuta, ha un suo grado di rigore che deve essere rispettato, per poter onestamente parlare di matematica. Esiste, in altre parole, un rigore (matematico) per ogni età, e sarà compito non banale della ricerca nell'ambito della didattica della matematica, individuare questi livelli di rigore che rispettino da una parte le dinamiche dell'apprendimento e dall'altra la matematica stessa.

§ 3. L'ESEMPIO DELL'ARITMETICA

Ci proponiamo ora di delineare il nascere e i primi sviluppi del linguaggio formale matematico in un caso, per così dire, emblematico: quello dell'aritmetica. Aritmetica e geometria sono un po' le colonne portanti della matematica, almeno nei suoi aspetti elementari e fondazionali, ed è naturale che si presentino, dunque, come i primi e i più naturali ambiti di alfabetizzazione matematica.

L'idea di numero naturale, nei suoi aspetti cardinale e ordinale, nasce poggiandosi sul concetto ancora confuso e approssimativo, rispettivamente, di insieme (finito) e di allineamento (cioè di insieme dotato di un ordinamento totale).

Nel primo caso, poggiando su una intuizione non formalizzata ma ottenuta generalizzando alcuni pochi casi di esperienze concrete, si può giungere al concetto di corrispondenza biunivoca tra insiemi e di qui a quello di numero cardinale (pensato come astratto delle classi degli insiemi finiti che si possono mettere appunto in corrispondenza biunivoca tra loro). Abbiamo già visto come questa impostazione non regga di fronte ad una accurata critica razionale, tuttavia essa è così spontanea e «naturale» da essere certamente accettabile e anzi consigliabile come primo approccio elementare al concetto di numero cardinale.

Al concetto di numero ordinale si può arrivare invece poggiando su operazioni elementari di confronto tra insiemi di diversa cardinalità, oppure anche sulla intuizione, anch'essa del tutto naturale anche se assolutamente informe, di ordinamento lineare o allineamento.

Assieme al primo momento di costruzione del concetto di numero troviamo poi anche il primo momento espressivo nel quale vengono dati gli strumenti verbali e grafici per rappresentare i numeri. Questo insegnamento fa parte della prima alfabetizzazione, sia linguistica che matematica. È importante però osservare che i due momenti dianzi considerati, della costruzione del concetto e della sua espressione, pur essendo quasi contemporanei, non sono tuttavia da confondersi. È possibile infatti riconoscere se due insiemi hanno la stessa quantità di elementi (lo stesso *numero di elementi*, diciamo abitualmente) senza nè conoscere i numeri nè saperli esprimere verbalmente o simbolicamente.

Fino a questo punto l'apprendimento della numerazione non presenta sostanziali differenze dall'apprendimento dei vocaboli della lingua materna, che aiutano il bambino nella concettualizzazione, cioè nella costruzione di concetti generali che fondano il principio di classificazione delle cose che lo circondano. Il linguaggio verbale non differisce dunque ancora sostanzialmente dal linguaggio formale. Anche la introduzione della scrittura dei numeri, fino a questo punto va di pari passo con l'apprendimento della scrittura dei simboli linguistici, perchè il bambino impara a tracciare certi simboli grafici che per lui sono analoghi alle lettere dell'alfabeto e che rappresentano i primi numeri naturali.

La diversificazione tra i due linguaggi, quello verbale e quello formale, comincia però subito appena ci si trova a dover scrivere numeri «abbastanza grandi». Infatti, mentre per scrivere numeri naturali minori di nove abbiamo a disposizione diversi simboli distinti, non disponiamo di altri simboli speciali per rappresentare i numeri maggiori di nove: tali numeri naturali li rappresentiamo invece con la ben nota *scrittura posizionale*, utilizzando come simboli grafici fondamentali le cifre da 0 a 9. È vero che nelle lingue europee un fenomeno analogo si presenta anche per la rappresentazione delle parole; non si possiede infatti un simbolo speciale per ogni vocabolo, ma al contrario, ogni parola è ottenuta dalla diversa giustapposizione di diversi simboli: le lettere dell'alfabeto. Vi è però una diversità sostanziale tra la scrittura posizionale dei numeri naturali, ottenuta mediante le cifre da 0 a 9, e la scrittura alfabetica dei vocaboli della lingua corrente e sta nell'uso che di queste diverse scritture si può fare. La scrittura alfabetica delle parole è infatti fine a se stessa e potrebbe in ogni momento essere sostituita con opportuni ideogrammi; la scrittura posizionale dei numeri, al contrario, si rivela preziosa quando si comincia a stabilire relazioni tra di essi, mediante le cosiddette *operazioni*. Ecco allora che da questo punto di vista si rivela estremamente educativo confrontare come si possano eseguire delle semplici operazioni, per esempio di somma oppure prodotto, tra numeri rappresentati con scrittura posizionale (per esempio in base dieci) oppure tra i numeri rappresentati da particolari ideogrammi, come ad esempio i simboli della numerazione Romana. La differenza tra il linguaggio formale e quello verbale comincia a mostrarsi quando si comincia ad usare i formalismi. Ecco dunque un primo esempio concreto di cosa significa la affermazione che «si fa» della matematica solo quando la si usa per dire qualcosa, cioè per risolvere dei problemi.

Considerazioni analoghe si possono fare anche a proposito delle numerazioni in basi diverse dal dieci. Il passaggio dalla scrittura di un dato numero in base dieci, alla scrittura dello stesso numero in un'altra base (2 oppure 60...!) può apparire a prima vista come una semplice *traslitterazione* analoga a quella che si opera scrivendo, ad esempio in caratteri latini, un cognome la cui scrittura originale è in caratteri cirillici, oppure greci. Anche in questi caso, tuttavia, il divario tra il linguaggio formale e quello verbale si evidenzia subito appena ci si rende conto che, nel caso della matematica, il passaggio da una base ad un'altra è sottoposto a ben precise leggi con determinate proprietà invarianti (per esempio le regole per compiere le operazioni), mentre la traslitterazione linguistica si limita a null'altro che un puro cambio di simboli grafici.

La piena portata del linguaggio formale in cui la matematica consiste, si può apprezzare quando si comincia ad operare sui numeri mediante l'applicazione delle leggi di confronto e di composizione (le ben note «operazioni»: la somma, il prodotto e le altre da loro derivate, sottrazione e divisione). Queste operazioni possono essere suggerite da esperienze abbastanza naturali, come ad esempio la riunione di due insiemi finiti oppure la costruzione, a partire da due insiemi, di un nuovo insieme detto prodotto cartesiano dei primi due. Queste manipolazioni godono di proprietà molto spontanee, come ad esempio la *commutatività* della riunione di due insiemi oppure la *associatività* della stessa riunione, quando si operi con più di due insiemi. Ciò che è interessante è la traduzione di queste operazioni e proprietà logiche, in simboli e proprietà formali tra i simboli. In questo modo si arriva al risultato di far funzionare i simboli in base alle loro leggi intrinseche dimenticandosi dei modelli di insiemi finiti, manipolando i quali ci è sorta l'idea del formalismo matematico.

Si mette nuovamente in evidenza, in questo modo, quell'aspetto peculiare della matematica che l'ha fatta diventare il linguaggio universale di tutte le scienze e si verifica anche, da questo punto di vista, che non possono essere ritenuti come *contenuti* della matematica quell'insieme di esperienze e manipolazioni che pure ne hanno suggerito i primi passi. Infatti, grazie a questa capacità dei simboli di «funzionare da soli», indipendentemente da ciò che rappresentano, il linguaggio matematico può applicarsi alle più svariate situazioni, solo che si adattino alle condizioni di base (assiomi) a cui i simboli devono soddisfare. La matematica si presenta allora come una sorta di «logica» che permette di estrapolare e prevedere risultati aventi valori generali, di portata ben più ampia del modesto ambito di esperienze dalle quali il formalismo è stato suggerito.

Da un punto di vista didattico riteniamo allora estremamente istruttivo sottolineare le proprietà formali che rendono possibili o lecite le operazioni tra numeri, facendo in modo che l'uso di queste proprietà da una parte diventi naturale e quasi automatico, ma dall'altra non appaia mai ovvio e scontato. A questo fine potà essere utile ideare molteplici situazioni atte a mettere in crisi una esecuzione ripetitiva e acritica di regole di calcolo assegnate. Per esemplificare si può suggerire l'esecuzione di operazioni, mediante l'uso di macchinette da calcolo tascabili, tra numeri aventi più cifre di quante il calcolatore è in grado di elaborare. Altro istruttivo esempio viene dall'operazione di divisione tra numeri interi; infatti con questo unico nome si indicano due procedimenti concettualmente ben diversi: uno, la divisione (senza resto), che è l'operazione inversa del prodotto, l'altro, la divisione con resto, che è effettivamente una nuova operazione, definita non solo a partire dalla moltiplicazione, ma anche dalla somma, e basata inoltre anche sulle proprietà di ordinamento degli interi.

Successive esperienze possono portare ad ampliare la intuizione primordiale di numero naturale. Si pensi ad esempio ai numeri negativi, di cui è facile immaginare la genesi, per esempio, attraverso la lettura di un termometro oppure nella esecuzione di un bilancio di «dare e avere». Analogamente si può pensare alle frazioni, intese come operatori, che si propongono spontaneamente appena si tratta di suddividere in parti uguali una qualsiasi grandezza. In modo non diverso da quanto si è visto per i numeri naturali, anche i primi passi di alfabetizzazione in questa direzione sono sostanzialmente di natura lessicale e i relativi concetti appartengono al ragionamento comune. Appena però si traducono in simboli anche queste nozioni, l'aspetto peculiare del linguaggio formale si rivela con ancora maggiore evidenza.

La rigidità delle regole che dominano il linguaggio formale matematico ha come conseguenza che l'estensione ai nuovi numeri delle vecchie operazioni già note per gli interi naturali, non può farsi in modo grossolano ed intuitivo, ma richiede, al contrario, una attenta strategia concettuale. In tal modo, ad esempio, per poter estendere le operazioni di somma e prodotto ai numeri interi negativi occorre costruire (necessariamente in modo astratto, formale, assiomatico) un nuovo insieme di enti, i *numeri interi relativi*, di cui un opportuno sottoinsieme (quello degli *interi positivi*) è isomorfo all'insieme dei *numeri naturali*. L'estensione delle stesse operazioni di somma e prodotto alle frazioni richiede poi ancora molto di più. Infatti una somma e prodotto di frazioni, definite in modo ingenuo, non riuscirebbe a soddisfare tutte le proprietà formali che abbiamo riconosciuto utili e significative per queste operazioni. Tali proprietà si possono salvare solo se le operazioni vengono definite non tra le singole frazioni, ma tra personaggi molto più complessi: le classi di frazioni equivalenti. Si è portati, in tal modo, alla costruzione di un nuovo insieme di oggetti, decisamente astratti e sfuggenti per l'intuizione più elementare: l'insieme dei *numeri razionali*.

Si potrebbe proseguire questa analisi prendendo ora in considerazione l'esperienza quotidiana che abbiamo della *continuità* ed esaminare come questa ci potrebbe condurre alla costruzione dell'insieme dei *numeri reali*. Ci limiteremo invece, per brevità, alle sole considerazioni sopra esposte, concludendole tuttavia con una osservazione fondamentale.

Abbiamo descritto alcuni momenti di un itinerario di alfabetizzazione aritmetica che va dagli interi naturali ai numeri razionali. Abbiamo visto in tal modo apparire insiemi numerici sempre più vasti, in cui le proprietà formali delle operazioni tra i numeri erano, per così dire, condizionate dalla natura dei numeri stessi. Possiamo parlare, in sostanza, di una visione oggettiva dell'aritmetica. Se si volesse però ulteriormente approfondire lo studio di questi enti che abbiamo chiamato numeri, e delle loro proprietà, saremmo portati ad addentrarci nella cosiddetta *algebra moderna* o *algebra astratta*. In questo ramo così caratteristico della matematica del nostro tempo, il punto di vista che poc'anzi abbiamo chiamato oggettivo è totalmente capovolto. Nell'algebra astratta sono le proprietà delle operazioni, definite sugli elementi di un insieme astratto qualsiasi, che *caratterizzano questi enti*, anzi, meglio, che caratterizzano il loro insieme. Da questo punto di vista, allora, non ha senso dire che un certo ente, preso a sè stante, è un numero, ma ha senso solo dire che *un certo insieme di enti ha una struttura di insieme numerico*, insieme che poi potrà essere di vari tipi: campo, corpo, anello.

6 GRANDEZZE E MISURE. PROBLEMI LOGICI E DIDATTICI

CARLO FELICE MANARA

1. Si potrebbe affermare che il concetto di «grandezza» è uno dei primi che il discente incontra (dopo di quello di numero intero naturale) nello studio della matematica a livello elementare. Infatti la operazione di misura, insieme con le nozioni ad essa collegate (e che conducono per esempio alla introduzione del sistema metrico decimale ed alle sue convenzioni) deve essere introdotta molto presto, perchè fa parte del patrimonio di conoscenze necessarie per la vita delle nostre società civilizzate, anche ad un livello molto basso di alfabetizzazione.

Inoltre il concetto intuitivo di grandezza sta alla base della trattazione che si dà abitualmente del concetto di numero razionale; trattazione che viene generalmente svolta mediante le «frazioni» e costituisce spesso un argomento di una certa difficoltà per i discenti.

Pensiamo quindi che sia opportuno fare una breve analisi del concetto di grandezza, per ricercare i fondamenti intuitivi sui quali esso si basa e per precisare, attraverso opportuni postulati, quelle nozioni soggiacenti che sono abitualmente accettate come «evidenti» ma non sempre formulate in modo esplicito, e sono tuttavia necessarie per una introduzione abbastanza rigorosa del concetto stesso.

2. È appena necessario osservare che la trattazione che qui daremo è destinata ai docenti, e comunque non può essere trasferita nell'insegnamento nella forma che ha qui, soprattutto a livello elementare. Riteniamo infatti che uno dei compiti più importanti dell'insegnante, soprattutto nelle prime età scolari, non sia tanto quello di dare un apparato formale e critico al discente, ma di guidarlo al dominio ed alla analisi della intuizione, ed alla formazione graduale di quelle operazioni di astrazione che porteranno poi alla costruzione della mentalità matematica, ed in generale dell'atteggiamento scientifico di fronte al reale.

A questo proposito vorremmo aggiungere che ciò che stiamo dicendo — a nostro parere — si applica non solo all'argomento qui trattato, ma anche ad altri argomenti che formano oggetto dell'insegnamento elementare, e medio: si attaglia, per esempio, al caso della teoria elementare, ingenua ed acritica degli insiemi (la cosiddetta «insiemistica») al formalismo dell'algebra di Boole che viene utilizzata in proposito, ai linguaggi ed alle terminologie tecniche che vi corrispondono.

Pensiamo infatti che l'armamentario della simbologia formale ed il relativo vocabolario debbano essere presentati in modo graduale, e comunque mai staccati dai contenuti che li motivano e che sono conosciuti e dominati con questi mezzi concettuali; in modo che il discente sia stimolato all'apprendimento dei formalismi dalla constatazione della potenza e della fecondità degli strumenti concettuali che egli manovra.

Non riteniamo invece di poter essere pienamente consenzienti con altri atteggiamenti didattici i quali, spesso in nome di astratto rigore, condurrebbero a presentare le strutture formali in modo distaccato dai contenuti, e ad insegnare le corrispondenti sintassi in modo puramente convenzionale, senza che esse siano giustificate dalla osservazione delle proprietà della realtà sulla quale il discente opera.

Pensiamo infatti di poter affermare che non sempre la strada della semplicità concettuale e del rigore astratto è la più facile per l'apprendimento delle strutture formali o in generale delle strutture linguistiche. Crediamo invece che il discente, in origine, sia in possesso di uncerto coarcevo di esperienze, e che sia compito del docente avviarlo a fare ordine, a costruire pian piano quelle strutture formali astratte che lo aiutino nella generalizzazione, nella concettualizzazione, e nella deduzione.

Vorremmo aggiungere che — a nostro parere — anche l'analisi dello sviluppo storico della scienza, ed in particolare della matematica, possa dare qualche utile informazione sulle strategie didattiche che si possono seguire nella introduzione e nell'insegnamento delle strutture astratte. E proprio la storia del pensiero scientifico insegna che l'analisi logica dei fondamenti della matematica ha richiesto millenni di maturazione; pertanto quelli che oggi ci appaiono — giustamente da un certo punto di vista — come i concetti più semplici e generali della matematica non sono stati i primi (in ordine cronologico) ad essere considerati come tali, ed invece hanno richiesto tempo e fatica per essere precisati e messi in evidenza dalla analisi logica ed epistemologica.

3. Ciò che è stato detto finora in generale può essere applicato in particolare al concetto di grandezza che — come è noto — è già stato preso in considerazione da Aristotele. Si tratta — a nostro parere — di un concetto elementare, che — ripetiamo — è alla base della operazione di matematizzazione della realtà, a tutti i livelli; pertanto pensiamo che ci si dovrebbe comportare nei suoi riguardi come ci si comporta nei riguardi del concetto di numero intero naturale: infatti nelle scuole elementari e medie si dànno le nozioni che riguardano la simbolizzazione del numero naturale e del numero razionale, insieme con le regole di questo simbolismo, ma soltanto più tardi si dà (quando si dà) una trattazione rigorosa e critica del concetto stesso. Invece, nel caso del concetto di grandezza, pare che sia difficile resistere alla tentazione di darne una definizione esplicita, anche a livello elementare. Accade quindi di incontrare nella letteratura didattica delle pseudodefinizioni date con frasi del tipo della seguente: «Grandezza è tutto ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione», oppure con altre frasi altrettanto vaghe e prive di un senso rigoroso e preciso, che si presti ad una successiva trattazione con i mezzi del simbolismo matematico (1).

Vorremmo osservare a questo punto che, proprio perchè il concetto di grandezza è (come abbiamo osservato) molto generale e addirittura fondamentale per molti capitoli della matematica, appare molto difficile darne una definizione 'per genus et differentiam' secondo i canoni della logica tradizionale; occorre quindi limitarsi a precisarlo con una definizione implicita, ottenuta mediante l'enunciazione di opportuni postulati. Tuttavia pensiamo anche di poter dire che il significato e la portata di una definizione implicita sono spesso difficilmente compresi in pieno dai discenti, soprattutto ove esistano delle abitudini didattiche di nominalismo, che portano a confondere la definizione di un ente con la ripetizione meccanica di frasi a volte prive di un senso preciso; tipica la frase che ancora oggi si sente ripetere spesso, che pretenderebbe di definire il punto come '...l'ente geometrico fondamentale privo di dimensioni'. Vorremmo infine ricordare che uno dei problemi più gravi della scuola è costituito dalla valutazione dell'apprendimento da parte dei discenti; e che, a questo proposito, può apparire spesso più comodo e sicuro da parte dell'insegnante il controllo della ripetizione esatta delle frasi di definizione (come si usava una volta quando si 'provava la lezione') piuttosto che la ricerca della certezza ragionevole che certi concetti sono posseduti e manovrati con sicurezza, anche se il discente non sa ripeterne una definizione memorizzata per psittacismo; e che viceversa una ripetizione precisa di enunciati può benissimo sussistere senza una effettiva acquisizione delle corrispondenti nozioni e dei concetti relativi.

Pertanto, chiudendo per ora la breve digressione sui problemi didattici, ribadiamo che la nostra trattazione dovrebbe servire per una analisi ed una rimeditazione critica da farsi da parte dei docenti, e che il trasferimento di questo lavoro nella didattica costituisce un ulteriore problema di cui non intendiamo ora occuparci.

(1) Ugo Cassina attribuisce la paternità della frase sopra riportata a L. Eulero; allo stesso U. Cassina si debbono altre notizie storiche ed osservazioni critiche che qui riportiamo. Cfr. U. Cassina: Critica dei principi della matematica e questioni di logica. Roma (Cremonese, 1961). - Nuova teoria delle grandezze.

4. La scelta di un sistema di postulati o di assiomi (2) che conduca alla definizione implicita rigorosa di un concetto elementare è in larga misura arbitraria, e quindi avviene in base a criteri personali sui quali giocano, oltre ai gusti ed alle mentalità dei vari Autori, anche gli scopi che essi vogliono raggiungere ed i quadri culturali generali nei quali le trattazioni si pensano inserite.

Non intendiamo fare ora una analisi completa di questa problematica, e vorremmo limitarci ad osservare che il concetto di grandezza è spesso collegato con quello di 'continuità'; di conseguenza la presentazione assiomatica del concetto di grandezza è spesso collegata con la teoria che fornisce gli strumenti analitici per dominare il continuo, cioè con la teoria dei numeri reali.

In questo ordine di idee ci limiteremo a presentare qui due possibili strade che possono essere seguite per presentare in modo rigoroso il concetto di grandezza.

La prima strada è stata aperta da G. Peano e poi ripercorsa da U. Cassina (3); tale strada potrebbe essere presentata sommariamente, utilizzando la terminologia corrente, con i seguenti punti essenziali:
Numeri interi naturali - Anello degli interi - Campo dei razionali - Campo dei reali - Grandezze.

In questo ordine di idee lo stesso Cassina enuncia i seguenti postulati, che gli permettono di sviluppare in modo rigoroso e completo la teoria delle grandezze:
I - Il prodotto di un numero reale assoluto per una grandezza è una grandezza.
II - Esistono grandezze nulle.
III - Il prodotto del numero 1 per una grandezza qualsivoglia è uguale alla grandezza stessa.
IV - Ogni numero che, moltiplicato per una grandezza qualsivoglia, non nulla, la lascia inalterata non può differire da 1.
V - Sia a una grandezza ed x, y dei numeri reali assoluti qualunque; allora l'ente che si ottiene moltiplicando per il numero x il prodotto di a per y non differisce da quello che si ottiene moltiplicando il prodotto di x per y per la grandezza a.

È superfluo osservare che questi enunciati, insieme con la trattazione che ad essi si collega, hanno senso soltanto quando si accetti di conoscere il numero reale per altra via, in modo del tutto staccato da ogni riferimento al concetto di grandezza che si vuole definire.

Un atteggiamento cosiffatto è consono alle idee di G. Peano, il quale — come è noto — non soltanto ha sviluppato in modo coerente la sua analisi sui fondamenti della matematica, ma anche ha indicato una linea didattica per l'insegnamento di questa materia, nello spirito dell'analisi dei fondamenti che egli stesso aveva svolto.

Tuttavia, pur salvando la ineccepibile eleganza della trattazione rigorosa dei concetti data da Peano e dalla sua scuola, e la coerenza della linea didattica che a questa trattazione si riattacca, oseremmo avanzare qualche sommessa osservazione in proposito, soprattutto per quanto riguarda la utilizzazione della intuizione, e la organizzazione logica del patrimonio di conoscenze e di esperienze che ogni discente possiede e che egli trae dalla propria vita quotidiana e dallo studio di altre materie, diverse dalla matematica ma forse non meno importanti e formative.

Riteniamo inoltre che nella costruzione di un sistema formale, soprattutto a livello elementare, sia utile contare anche sull'apporto della fantasia, la quale elabora i dati delle esperienze dei sensi, astraendo da molti particolari e fornendo all'intelletto gli elementi per costruire, con strumenti logici rigorosi, i concetti della matematica ed i simboli che li rappresentano. In particolare osiamo dire che il concetto di 'continuo' è proprio costruito su una elaborazione fanta-

(2) A stretto rigore, i termini 'assioma' e 'postulato' non sono esattamente sinonimi; tuttavia, secondo l'abitudine ormai invalsa, noi li tratteremo qui come tali.

(3) I riferimenti bibliografici e gli sviluppi sui quali non ci soffermiamo possono essere trovati nell'opera di U. Cassina citata in (1).

stica della esperienza sensibile, la quale ci fa percepire come priva di lacune una realtà materiale nella quale invece, di fatto, prevalgono i 'vuoti' sui 'pieni'.

Ma osiamo anche dire che proprio questa elaborazione fantastica della esperienza sensibile è uno dei fondamenti della geometria, nel senso tradizionale del termine, e dell'Analisi matematica.

In questo ordine di idee si potrebbe pensare di seguire una strada i cui capisaldi fondamentali potrebbero essere i seguenti:
Numeri interi naturali - Grandezze - Numeri razionali assoluti - Numeri reali assoluti - Campo reale.

In questo atteggiamento quindi il concetto di grandezza, presentato attraverso un apposito sistema di postulati, fonda poi la costruzione dell'insieme dei numeri razionali assoluti e dei numeri reali assoluti, che si presentano come operatori sulle grandezze continue. Come abbiamo già osservato, è questa la procedura che si segue a livello elementare per introdurre il concetto di «frazione» e quindi la strada che seguiremo ci appare come la traduzione naturale, in termini di rigore logico, del procedimento che viene seguito a livello elementare e che costituisce — ripetiamo — uno dei primi passi della matematizzazione del reale.

5. Il sistema di assiomi che presentiamo si ispira sostanzialmente alla trattazione che dell'argomento è stata data da C. Burali Forti (4). In questa trattazione si mira a dare una teoria delle grandezze continue, assolute, archimedee; la successione degli assiomi parte dalla enunciazione di proprietà che si giudicano come le più semplici, perchè più direttamente legate alla manipolazione degli enti della realtà concreta che si classificano abitualmente come «classi di gandezze omogenee». Pertanto si presentano anzitutto gli assiomi che riguardano la relazione di «uguaglianza»; come è noto, nei casi concreti, la verifica materiale del sussistere di questa relazione tra due grandezze viene eseguita con operazioni del tipo più svariato, e diverse da caso a caso: per esempio con manipolazioni e trasporti di corpi rigidi o di figure rigide se si tratta di lunghezze di segmenti o di aree o volumi di figure; con uso di strumenti anche relarivamente complicati, come bilance, voltmetri, amperometri se si tratta di grandezze della vita comune o della Fisica. Si passa poi ad introdurre la operazione chiamata convenzionalmente «somma», precisandone le proprietà formali. Attraverso le proprietà della somma vengono poi introdotte le proprietà di ordinamento. Infine si enunciano le proprietà di divisibilità e di continuità. A questo proposito vorremmo osservare che questa proprietà fonda la costruzione dei numeri razionali e poi dei numeri reali: invero per poter accertare che, per ogni numero naturale n, esiste il sottomultiplo di una grandezza qualesivoglia secondo il numero stesso è necessario enunciare il postulato di continuità o un'altra proposizione equivalente. E d'altra parte la costruzione dell'insieme dei reali è essenziale perchè si possa eseguire la operazione di misura; la quale, a sua volta, fonda la possibilità di rappresentare ogni grandezza mediante un numero, ed utilizzare quel parallelismo tra le operazioni sulle grandezze e le operazioni sui numeri il quale fonda e giustifica la matematizzazione del mondo reale su cui operiamo.

Osserviamo inoltre che il postulato di continuità differisce dagli altri, i quali — in qualche modo — enunciano delle proprietà che vengono astratte dalla esperienza comune e quindi si presentano come materialmente «verificabili» sui modelli concreti; invece il postulato di continuità non si riferisce alla esecuzione di certe operazioni, ma semplicemente si limita ad affermare la esistenza di certi elementi sotto determinate ipotesi. Esso è quindi di natura lievemente diversa dagli altri, tanto nella sua genesi psicologica che nel significato e nelle conseguenze. Ed invero — come abbiamo detto — il concetto di continuità fonda la costruzione del numero reale, il quale, nelle trattazioni abituali, viene introdotto mediante classi di infiniti numeri ra-

(4) Cesare Burali Forti, *Logica matematica* - Milano (U. Hoepli ed. 1919). In questo volume il Burali Forti espone i suoi postulati per le grandezze con le notazioni della Logica matematica. Tale presentazione è stata tradotta in linguaggio comune da U. Cassina nel volume già citato in (1).

zionali. Analizzando la stessa cosa da un punto di vista leggermente diverso, vorremmo ricordare che la proprietà di continuità è fondamento su cui si basa la dimostrazione della esistenza di coppie di grandezze incommensurabili; tali coppie possono essere introdotte attraverso la negazione della esistenza di un sottomultiplo comune, e questa negazione trascende ogni esperienza fisicamente eseguibile e addirittura contraddice le concezioni della Fisica la quale ammette l'esistenza di cotituenti elementari della materia.

In questa trattazione la proposizione di Archimede viene dimostrata come teorema ed il concetto di numero reale viene introdotto, in accordo con l'atteggiamento di G. Peano, nella forma più semplice, come classe superiormente limitata e completa di numeri razionali assoluti. È noto inoltre che non si presentano gravi difficoltà per passare dall'insieme dei numeri reali assoluti al campo reale.

È possibile infine dare la constatazione della indipendenza ordinata del sistema di postulati enunciati, mediante la costruzione di opportuni modelli, tratti dalla esperienza sensibile o da altri capitoli della matematica, che ovviamente si suppongono sviluppati in modo indipendente.

UN POSSIBILE INSIEME DI ASSIOMI PER IL CONCETTO DI «GRANDEZZA»

6. LEGENDA

I - Il simbolo «$\Rightarrow$», posto tra due proposizioni, indica, in forma stenografica, che la proposizione che sta a destra è conseguenza di quella che sta a sinistra.
II - Il simbolo «§» indicherà «paragrafo».
II - Il simbolo «&», posto tra due proposizioni, indica l'affermazione simultanea di entrambe.
IV - Il simbolo «v», posto tra le due proposizioni, indica l'alternativa tra le due, cioè che almeno una di esse è vera.
V - Il simbolo «$\Leftrightarrow$» posto tra due proposizioni indica che ognuna di esse è conseguenza dell'altra.
VI - Il simbolo «$=_{df}$» da leggersi «uguale per definizione», posto fra due espressioni, delle quali l'una ha significato noto e l'altra è nuova, indica che quest'ultima verrà considerata a tutti gli effetti come sostituibile a quella nota.

7. CLASSE DI GRANDEZZE OMOGENEE - RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Indichiamo con «Gr» una classe di grandezze omogenee. Gli elementi di tale classe saranno indicati nel seguito con le lettere latine maiuscole: A,B,C, ... X,Y,Z, ... etc.

Esiste un predicato biargomentale (relazione) definito sul quadrato cartesiano dell'insieme Gr, cioè sull'insieme delle coppie ordinate di elementi di Gr. Il sussistere di tale relazione tra due elementi A,B di Gr verrà indicato col simbolo:

(1) $E(A,B)$.

Per la relazione «E» sono supposti validi i seguenti assiomi:

Ax.I-1 $E(A,A)$ (proprietà riflessiva).

Ax.I-2 $E(A,C)\ \&\ E(B,C) \Rightarrow E(A,B)$ (propietà transitiva).

Si dimostra il seguente:

Teo.1 $E(A,B) \Rightarrow E(B,A)$ (proprietà simmetrica).

CONVENZIONE. - Il sussistere della relazione «E» tra due elementi A,B di Gr verrà d'ora innanzi espresso nella forma abituale classica:

(2) $A=B =_{df} E(A,B)$

Quindi gli assiomi enunciati possono essere trascritti nella forma abituale, secondo la convenzione adottata.

Ax.I-1 $A=A$

Ax.I-2 $A=C\ \&\ B=C \Rightarrow A=B$.

Corrispondentemene il Teo.1 potrà essere espresso nella forma seguente:

Teo.1 $A=B \Rightarrow B=A$.

Analogamente, per indicare che tra due elementi A,B di Gr *non* sussiste la relazione «E» scriveremo:

(3) $$A \neq B$$

leggendo «A è diverso da B».

Ax.I-3. Nell'insieme Gr esistono almeno due elementi diversi tra loro.

8. SOMMA DI DUE GRANDEZZE

Esiste una funzione biargomentale (operazione) definita sul quadro cartesiano di Gr ed a valori in Gr. Tale funzione fornisce quindi una «legge di composizione interna» in Gr; l'elemento di Gr che corrisponde alla coppia ordinata di elementi A,B considerati come argomenti della funzione sarà indicato con:

(1) $$S(A,B).$$

Per la funzione «S» valgono i seguenti assiomi:

ax.II-1 S(A,B) è un elemento di Gr (cioè «S» è una legge di composizione interna).

Ax.II-2 $S(S(A,B),C) = S(A,S(B,C))$ (proprietà associativa).

Ax.II-3 $S(A,B) = S(B,A)$ (proprietà commutativa).

CONVENZIONE - D'ora innanzi l'elemento di Gr che corrisponde alla coppia ordinata di elementi A,B per la funzione «S» sarà indicato con la notazione abituale classica, secondo la seguente definizione:

(2) $$A+B =_{df} S(A,B).$$

Di conseguenza gli assiomi II-1,2,3 possono essere enunciati nella forma abituale:

Ax.II-1 $A+B$ appartiene a Gr

Ax.II-2 $(A+B)+C = A+(B+C)$

Ax.II-3 $A+B = B+A$.

Anche gli assiomi successivi saranno enunciati facendo uso della convenzione.

Ax.II-4 - Esiste in Gr un elemento O tale che si abbia, per ogni A,

(3) $A+O = A$ (esistenza dell'elemento neutro per l'operazione «S»).

Ax.II-5 $A+C = B+C \Rightarrow A=B$ (legge di cancellazione).

OSSERVAZIONE - Non è necessario postulare.

$$A=B \Rightarrow A+C = B+C$$

perchè il simbolo «+C» può essere considerato come un operatore a destra sugli elementi di Gr, e quindi la proposizione consegue dalla legge logica generale, secondo la quale, operando su elementi uguali con medesimo operatore, si ottengono elementi uguali.

Teo.1 - Se esiste in Gr un elemento O' tale che, per ogni A, si abbia

$$O'+A = A$$

allora è

$$O'=O$$

(unicità dell'elemento neutro per «S»).

Dim. La dimostrazione è quella classica che si dà per dimostrare l'unicità dell'elemento neutro di un gruppo.

CONVENZIONE. L'operazione «S» verrà indicata d'ora innanzi col nome di «somma» di due elementi di Gr; ciò è giustificato dalle analogie esistenti tra le proprietà formali della operazione sulle grandezze e la somma di due interi naturali, le cui proprietà si suppongono conosciute.

9. ASSIOMA DI MONOTONIA

Ax.III $$A+B = O \Rightarrow A=O.$$
Teo.1 $$A+B = O \Rightarrow A=O \ \& \ B=O.$$
Dim. La dimostrazione segue dagli Ax.II-4,5 e III.

10. ASSIOMA DI DIVISIBILITÀ

Ax.IV - Se è $A \neq O$ esistono (almeno) due elementi di Gr, B,C tali che si abbia
$$B,C \neq 0 \ \& \ A = B+C.$$
In parole: ogni grandezza diversa dalla grandezza zero può sempre essere pensata come somma di almeno due altre diverse da zero.
OSSERVAZIONE - Di questo Ax. e dell'Ax.I-3 segue che nell'insieme Gr esistono infiniti elementi.

11. ORDINAMENTO

Si definisce in Gr un predicato bioargomentale (relazione) «M» nel modo seguente:
(1) $$M(A,B) =_{df} \text{esiste } C \text{ tale che sia } B = A+C.$$
Teo.1 $$M(A,B) \ \& \ M(B,A) \Rightarrow A=B.$$
Dim. La dimostrazione segue dalla definizione del predicato «M» e dall'Ax.III e sue conseguenze.
Teo.2 $M(A,B) \ \& \ M(B,C) \Rightarrow M(A,C)$ (proprietà transitiva della relazione «M»).
Dim. Immediata dalla df.
Teo.3 - Per ogni A vale M(O,A).
Dim. Immediata dall'Ax.II-4 e dalla df. del predicato «M».
Teo.4 $$M(A,B) \Leftrightarrow M(A+C, B+C)$$
Dim. Immediata dalla df, di «M» e da Ax.II-2.
Ax.V - Dati due elementi A,B qualisivogliano di Gr si ha
(2) $$M(A,B) \vee M(B,A)$$
(Assioma di completezza dell'ordinamento determinato in Gr dalla relazione «M»).
CONVENZIONE - Nel seguito il sussistere della relazione «M» tra due elementi A,B di Gr sarà indicato con il simbolo abituale «$\leq$» posto tra i due simboli A e B. Porremo quindi
(3) $$A \leq B =_{df} M(A,B).$$
Porremo anche
(3) $$B \geq A =_{df} A \leq B$$
ed anche
(4) $$A<B =_{df} A \leq B \ \& \ A \neq B;$$
ed infine
(5) $$B>A =_{df} A<B.$$
Teo.5 $$A>O \Leftrightarrow A \neq O.$$
Dim. Immediata.
Teo.6 $$A \leq B \ \& \ B<C \Rightarrow A<C.$$
Teo.7 $$A<B \ \& \ B \leq C \Rightarrow A<C.$$
Teo.8 $$A<B \ \& \ B<C \Rightarrow A<C.$$
(proprietà transitiva della relazione definita dal segno «$<$»).
Teo.9 $$A<B \Leftrightarrow A+C < B+C.$$
Di tutti questi teoremi la dimostrazione è immediata in seguito alla (1) ed alle dimostrazioni precedenti.
Teo.10 - Se è
(6) $$A<B$$

esiste almeno un C tale che sia

(7) $A<C \;\&\; C<B.$

Dim. Dalla ipotesi che segue che esiste un D tale che sia

(8) $B = A+D \;\&\; D>0;$

di qui e dall'Ax.IV segue che esistono almeno due X,Y, tali che si abbia:

(9) $X,Y \neq O \;\&\; D = X+Y.$

Posto

(10) $C = A+X$

segue immediatamente la tesi. QED.

Corollario - Se vale la (6), indicando con n un numero naturale qualsiasi, esistono almeno n elementi $C_1, C_2, \ldots C_n$ tali che si abbia

(11) $A<C_1<C_2< \quad \ldots\ldots \quad <C_n<B.$

Teo. 11 - Se è

(12) $A \neq B$

deve essere valida una ed una sola delle due relazioni

(13) $A>B$ oppure $A<B$.

Dim. Segue dall'Ax.V. Invero non può essere $A=B$ perchè ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi ammessa. Deve quindi essere

$A \leq B$ oppure $A \geq B$.

Ma queste relazioni non possono essere vere entrambe, perchè altrimenti dal Teo.1 seguirebbe ancora la contraddizione all'ipotesi. Segue quindi la Tesi per la df (4).

Teo. 12 - Se è

(14) $A+B = C+D \;\&\; A>C$

allora è

(15) $B<D.$

Dim. Per il Teo. 9 ed il Teo. 11 ognuno degli altri due casi:

(16) $B=D$ oppure $B>D$

conduce a contraddire l'ipotesi. QED.

12. CONTINUITÀ

Sia Σ un insieme di grandezze, sottoinsieme di Gr. Diremo che Σ è superiormente limitato se esiste in Gr almeno un elemento A che non è inferiore ad alcun elemento di Σ.

Sia un insieme di grandezze superiore limitato. Indicheremo con Σ_c e chiameremo «completamento di Σ» l'insieme costituito da tutte le grandezze di Σ e da tutte quelle che sono non maggiori di qualche elemento di Σ.

OSSERVAZIONE - Se un insieme Σ coincide con quello che si ottiene da lui mediante l'operazione di completamento diremo che è completo.

L'insieme che si ottiene completando un insieme già completo coincide con l'insieme di partenza.

Ax. VI - (Di continuità) Indicando con Σ un insieme di grandezze superiormente limitato, esiste (almeno) una grandezza S che possiede le due seguenti proprietà:

i) ogni grandezza di Σ non è superiore ad S;

ii) Ogni grandezza Y minore di S appartiene a Σ_c.

Si dimostra il seguente

Lemma - Data una grandezza Y tale che sia

(1) $Y<S$

esiste in Σ una grandezza maggiore di Y.

Si dimostra pure il

Teo. - Nelle ipotesi dell'Ax.VI, se esiste un altro elemento S' che possiede entrambe le proprietà i) e ii) enunciate nell'Ax. si ha

(3) $$S = S'.$$

Pertanto l'elemento S di cui l'Ax.VI garantisce l'esistenza è unico. Esso verrà chiamato «estremo superiore di Σ» ed indicato col simbolo:

(4) $$S = \sup \Sigma.$$

CONVENZIONE - Data una classe di grandezze soddisfacente alle ipotesi dell'Ax.VI, se S appartiene alla classe Σ porremo

(5) $$S = \max \Sigma$$

e diremo che S è il massimo della classe Σ.

13. MULTIPLI

Siano m,n,p,q,r,s, ... dei numeri (interi) naturali; definiremo il simbolo:

(1) $$nA$$

che leggeremo «n per A» oppure «n volte A» oppure «multiplo di A secondo n» o con altre frasi analoghe, con la definizione ricorsiva seguente:

(1) $$oA = O$$ o essendo il numero zero

(2) $$(n+1)A = nA+A.$$

Segue di qui che, ponendo nella (2) n=o e tenendo conto di (1) si ha

(3) $$1\,A=A.$$

CONVENZIONE - Invece del simbolo «nA» scriveremo anche An, ponendo quindi

(4) $$An =_{df} nA.$$

Teo.1 $$nO=O$$

Dim. Per induzione sui valori di n.

Teo.2 - Se è

(5) $$A\neq O \;\&\; n\neq o$$

è anche

$$nA\neq O.$$

Dim. Per induzione dalla (2).

Teo.3 $$n(A+B) = nA+nB$$

(proprieta distributiva del prodotto rispetto alla somma di grandezze).

Dim. Per induzione sui valori di n.

Teo.4 $$(m+n)A = mA+nA$$

(proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma dei numeri).

Dim. Per induzione sui valori di m.

Teo.5 $$A=B \Rightarrow nA=nB.$$

Teo.6 $$A\leq B \;\&\; n\neq o \Rightarrow nA\leq nB.$$

Dim. Dal Teo.3 e dalla df della relazione «$\leq$».

Teo.7 $$A\neq O \;\&\; m<n \Rightarrow mA<nA.$$

Dim. dalla ipotesi segue

$$n=m + (n-m) \qquad n-m>o.$$

La Tesi segue dai Teo. sopra dimostrati.

Teo.8 $$nA=nB \;\&\; nA\neq O \Rightarrow A=B.$$

Dim. Non può essere nè A<B nè A>B, altrimenti la ipotesi verrebbe contraddetta in forza dei Teo. precedenti.

Teo.9 - Indicati con n,m due numeri (interi) naturali, è

(6) $$m(nA) = (mn)A.$$

Dim. Per induzione sui valori di n.

CONVENZIONE - Scriveremo «mnA» al posto di (mn)A, ponendo quindi

(7) $$mnA =_{df} (mn)A.$$

Porremo anche

(8) $$mnA =_{df} mAn =_{df} Amn.$$

Teo.10 - Sia n un numero naturale diverso da zero e sia

(9) $$A \neq O$$

allora esiste un elemento U di Gr tale che sia

(10) $$U \neq O \;\&\; nU < A.$$

Dim. Per l'Ax.IV esistono due elementi B,C di Gr tali che sia

(11) $$B,C \neq O \;\&\; A = B+C;$$

si possono dare due casi:

i) è $B=C$ e quindi $A = B+B = 2B$;

ii) è $B<C$ oppure $C<B$.

Possiamo sempre pensare di aver dato i nomi agli elementi di Gr in modo che sia valida la prima relazione. Quindi è

(12) $$2B = B+B < B+C = A.$$

Pertanto, è stato trovato un elemento B di Gr tale che sia

(13) $$2B \leq A \;\&\; B \neq O.$$

Ripetendo il ragionamento si giunge a dimostrare la esistenza di (almeno) un elemento B_1 tale che sia

$$B_1 \neq O \;\&\; 2B_1 \leq B$$

e quindi

$$4B_1 \leq A.$$

Ripetendo m volte il ragionamento si giunge a dimostrare la esistenza di (almeno) un elemento B_m tale che sia

$$2^{m+1} B_m \leq A.$$

Scelto l'intero m tale che si abbia

$$2^{m+1} > n$$

si ha di conseguenza la Tesi, ponendo $U=B_m$. QED.

14. SOTTOMULTIPLI

Sia n un numero naturale qualsiasi, diverso dallo zero; sia A una grandezza qualsivoglia, elemento di Gr.

Teo.1 - Esiste ed è unica una grandezza B tale che sia

(1) $$nB=A.$$

Dim.

i) Se è $A=O$ si assume $B=O$, per quanto è detto nel § precedente.

ii) Sia poi

(2) $$A \neq O$$

ed indichiamo con Θ la classe delle grandezze T che soddisfano alle seguenti condizioni:

(3) $$T>O \;\&\; nT \leq A.$$

La classe Θ non è vuota, in forza del Teo.10 del § precedente; inoltre essa è superiormente limitata, perchè per esempio la grandezza A e tutte quelle maggiori di A non vi appartengono. Poniamo

(4) $$B = \sup \Theta.$$

Si ha

(5) $$nB = A.$$

Infatti:

iii) non può essere

(6) $$nB<A;$$

invero da questa ipotesi segue che esiste C tale che sia

(7) $nB+C = A$ & $C>O$.

Chiamiamo ora D una grandezza tale che si abbia

(8) $D>O$ & $nD<C$.

La grandezza D esiste, sempre in forza del Teo.10 del § precedente e si ha

(9) $nB+nD = n(B+D) < nB+C = A$.

Quindi la grandezza B+D ha il suo multiplo secondo n che è minore di A, contro la (4).

iv) Non può essere

(11) $nB>A$;

infatti in questa ipotesi esiste una C tale che sia:

(12) $nB = A+C$.

Consideriamo ora una D tale che si abbia

(13) $D>O$ & $nD<C$;

possiamo sempre supporre che sia anche

(14) $D<B$

eventualmente scegliendo la minima tra le due che soddisfano ad entrambe le relazioni: (14) e seconda delle (13):

Dalla (14) si trae la esistenza di una M tale che sia

(15) $M>OP$ & $D+M = B$

e quindi, dalla (12),

(16) $n(M+D) = A+C$;

ma dalla seconda delle (13) e dal Teo.12 del § 11 si trae

(17) $nM>A$

mentre dalla (15) si ha che M appartiene a Θ_C, contro la definizione della classe Θ e contro la (4).

Pertanto è valida la (5); inoltre la dimostrazione ora svolta garantisce anche la unicità della B che soddisfa alla (5) stessa.

CONVENZIONE - La B che soddisfa alla (5) verrà indicata nel seguito con una delle seguenti notazioni:

(19) $B = (1/n)A$ oppure $1/nA$ oppure A/n

e chiamata «sottomultiplo di A secondo n» o anche «un ennesimo di A».

Teo.2 - Indicati con n,m due numeri naturali entrambi diversi da zero, si ha

(20) $(1/n)\,(mA) = m(1/n)A$.

Dim. Poniamo:

(21) $(1/n)\,(mA) = V$

talchè si abbia:

(22) $nV = mA$.

Poniamo anche:

(2») $(1/n)A = U$

talchè si abbia

(24) $nU = A$.

Di qui

(25) $nV = m(nU) = n(mU)$

e dal Teo. 8 § 13

(26) $V = mU$ QED.

CONVENZIONE - Le grandezze m(1/n)A sarà indicata con uno dei simboli:

(27) A oppure mA/n oppure $(m/n)A$

da leggersi «m ennesimi di A».

Teo. 3 - Nelle ipotesi del Teo. precedente, indicato con k un (intero) naturale diverso dallo zero, si ha:

(28) $(mk)A/(nk) = mA/n$.

Dim. Poniamo:

(29) $$U = (1/nk)A$$

talchè si abbia:

(30) $$kU = (1/n)A \text{ ed anche } A = nkU.$$

di qui:

(31) $$m(1/n)A = m(kU) = (mk)U = mk(1/nk)A \quad \text{QED.}$$

OSSERVAZIONE - Il simbolo «m/n» si presenta come un operatore sulla classe di grandezze; invero, scritto davanti al simbolo di una grandezza qualunque, esprime un'altra grandezza della stessa classe.

Lo stesso simbolo «m/n» viene spesso chiamato «frazione», ed i due naturali m,n vengono chiamati rispettivamente «numeratore» e «denominatore» della frazione. Il Teo. 3 assicura che i due simboli operatoriali

(32) $$m/n \text{ ed } mk/nk$$

dànno lo stesso risultato; si suol dire che le due frazioni (32) sono «equivalenti» e si suol scrivere:

(33) $$m/n = mk/nk$$

ed in particolare si ha

(33) bis $$1/1 = k/k.$$

Teo. 4 - Indicati con m,n,p,q quattro numeri naturali tutti diversi da zero, si ha:

(34) $$(m/n)\,[(p/q)A] = (mp/nq)A.$$

Dim. Poniamo:

(35) $$U = (1/nq)A$$

talchè si abbia:

(36) $$nq\,U = A = n(qU)$$

e quindi

(37) $$qU = (1/n)A; \ nU = (1/q)A.$$

Di qui:

(38) $$(p/q)Q = p(1/q)A = p(nU) = n(pU);$$

ed è anche:

(39) $$pU = (1/n)\,[(p/q)A]$$

ed infine:

(40) $$mpU = (m/n)\,[(p/q)A] \quad \text{QED.}$$

OSSERVAZIONE - La relazione definita dalla (33) possiede le proprietà fondamentali (riflessiva, simmetrica, transitiva) che ne fanno una «relazione di equivalenza». La scelta di un rappresentante canonico della classe di equivalenza cui appartiene una certa frazione può essere fatta, per esempio, con la nota «riduzione della frazione ai minimi termini».

15. NUMERI RAZIONALI

CONVENZIONE - La classe di equivalenza a cui appartiene un operatore «p/q» viene chiamata «numero razionale».

OSSERVAZIONE - Il Teo. 4 può essere enunciato dicendo che il «prodotto» di due operatori si esegue facendo i prodotti dei numeratori e dei denominatori di due qualsivogliano frazioni che rappresentano gli operatori stessi. Dalle propietà note dei numeri naturali segue che il prodotto è commutativo ed associativo, e che l'operatore «k/k» è l'elemento neutro dell'operazione di prodotto così definita.

Questa infine possiede una inversa, poichè si ha:

(1) $$(m/n)\,[(n/m)A] = (nm/mn)A = A.$$

CONVENZIONE - D'ora innanzi il segno di uguaglianza «=» posto tra due simboli di frazione indicherà la identità delle due classi di equivalenza degli operatori individuati dalle frazioni stesse.

Scriveremo quindi, per esempio:

$$2/3 = 50/75$$

Analogamente, parlando di «prodotto» intenderemo il prodotto di due numeri razionali individuati da due frazioni, ponendo quindi:

(2) $$(p/q) \times (m/n) = mp/np.$$

Ciò che abbiamo detto finora porta di conseguenza che rispetto alla operazione di prodotto definita qui sopra i numeri razionali formano un gruppo abeliano.

Teo. 1 - Indicato con n un numero (intero) naturale non nullo e con A e B due elementi qualunque della classe Gr si ha

(3) $$(1/n)\ (A+B) = (1/n)A+(1/n)B.$$

Dim.

Poniamo:

(4) $$U = (1/n)A; \quad V = (1/n)B$$

talchè si abbia:

(5) $$nU = A \quad nV = B.$$

Di qui, per il Teo. 3 § 13 si ha

(6) $$A+B = n(U+V)$$

e da questa e dalle (4) segue la Tesi. QED.

DEFINIZIONE - Indicati con m,n,p,q quattro numeri (interi) naturali, tutti diversi dallo zero, poniamo:

(7) $$[m/n+p/q]A =_{df} (m/n)A + (p/q)A.$$

OSSERVAZIONE - Il simbolo che sta a destra della eguaglianza precedente ha un significato preciso, in base a ciò che è stato detto finora; pertanto la (7) dà la definizione del simbolo che sta a sinistra,cioè della «somma di due numeri razionali».

Teo. 6 - Siano m/n e p/q due frazioni e sia r un intero multiplo comune di n e q, tale che si abbia:

(8) $$r = nu = qv \qquad \text{(u,v interi).}$$

Allora è

(8) $$m/n+p/q = (mu+pv)/r.$$

Dim. Indichiamo con U il sottomultiplo di A secondo r, poniamo cioè:

(9) $$(1/r)A = U \quad \text{ossia} \quad A = rU.$$

Allora si ha:

(10) $$m/n = mu/r; \quad p/q = pv/r;$$

di conseguenza della (7) possiamo scrivere:

(11) $$(m/n)A+(p/q)A = (mu/r)A+(pv/r)A = mu\,U+pv\,U = $$
$$= (mu+pv)U = [(mu+pv)/r]A. \quad \text{QED.}$$

CONVENZIONE - Estendendo il significato del termine «frazione» usato finora, prendiamo in considerazione anche le frazioni il cui numeratore è nullo. Una frazione cosiffatta sarà posta uguale all'operatore che porta ogni grandezza A nella grandezza O (zero); porremo cioè, quale che sia A:

(12) $$(o/n)a = O.$$

Teo. 2 - Rispetto alla operazione di «somma» definita sopra, i numeri razionali costituiscono un semigruppo commutativo, il cui elemento neutro è la frazione o/n or ora introdotta.

Dim. Immediata, in base a ciò che precede.

Teo. 3 - La operazione di prodotto di due razionali è distributiva rispetto a quella di somma; si ha cioè:

(13) $$(r/s)\ [m/n+p/q] = rm/sn+pr/qs.$$

Dim. Immediata in base a ciò che precede.

Teo. 4 - Siano m,n,p,q quattro (interi) naturali, tutti diversi da zero. Se è

(14) $$mq > pn$$

allora, quale che sia la grandezza A, diversa dalla grandezza zero, si ha

(15) $(m/n)A > (p/q)A$

e viceversa.

Dim. Nella ipotesi (14) si ha

(16) $mq/nq = np/nq + (mq-np)/nq$

e di qui segue la Tesi.

CONVENZIONE - Quali che siano gli interi m,n,q, diversi da zero, porremo

(17) $m/n > o/q$ «o» essendo il numero zero.

OSSERVAZIONE - Si verifica che la relazione tra coppie di razionali, or ora introdotta ed indicata con il simbolo «>» possiede tutte le proprietà formali della relazione tra coppie di grandezze indicata con lo stesso simbolo e introdotta al § 11.

16. PROPOSIZIONE DI ARCHIMEDE

Teo. - Siano A e B due grandezze e si abbia

(1) $O < B < A;$

esiste almeno un intero n tale che sia

(2) $2^n B > A.$

Dim. Per assurdo. Indichiamo con Θ l'insieme delle gradezze tali che, presa una qualunque grandezza Z di Θ, si abbia per ogni n

(3) $2^n Z < A.$

Certamente la grandezza O (zero) appartiene a Θ. Supponiamo ora che Θ non si riduca al solo elemento O ed indichiamo con B una grandezza tale che sia $B > O$ e che appartenga a Θ. Osserviamo che Θ è superiormente limitata, perchè certo ogni suo elemento è minore di A. Indichiamo con T l'estremo superiore di Θ, ponendo quindi

(4) $T = \sup \Theta;$

dalla ipotesi ammessa si ha $T > O$, e poniamo

(5) $T_1 = (1/2)T;$

questa grandezza T_1 esiste, per quanto dimostrato nel § 14,e si ha anche che T_1 appartiene a Θ. Ora è

$$4T_1 > T$$

e quindi $4T_1$, non appartiene a Θ; di conseguenza esiste un intero m tale che sia

(6) $2^m(4T_1) > A;$

e posto

(7) $n = m+2$

si ottiene

(8) $2^n T_1 > A$

contro la proprietà supposta vera per gli elementi della classe Θ. È quindi assurda l'ipotesi che questa classe contenga qualche elemento diverso dall'elemento O.

17. INDIPENDENZA ORDINATA DEGLI ASSIOMI

La indipendenza ordinata dei vari gruppi di assiomi sarà qui constatata nel modo abituale, presentando dei modelli, tratti da altri capitoli della matematica, che soddisfano a tutti gli assiomi fino ad uno determinato di essi ma non ai successivi. Ovviamente i capitoli della matematica con i quali tali modelli vengono costruiti sono supposti coerenti e logicamente fondati.

Ax.I - Gli assiomi del gruppo I saranno considerati qui come fondamentali ed accettati come coerenti ed indipendenti senza ulteriori analisi.

Ax.II-2 - Proprietà associativa della operazione «S»; gli esempi possono essere tratti da vari capitoli dell'algebra che presentano leggi di composizione interna non associative.

Ax.II-3 - Anche la esistenza di leggi di composizione interna associative ma non commutative può essere provata facendo ricorso a vari capitoli dell'algebra (teoria dei gruppi).

Ax.II-4 - Esistenza dell'elemento neutro. Sia N l'insieme dei numeri naturali, escluso lo zero, e la legge di composizione interna sia la somma, nel senso abituale che a questo termine si dà nell'aritmetica elementare.

Ax.II-5 - Legge di cancellazione - Si consideri l'insieme dei numeri interi e sia «=» la relazione di congruenza, modulo un numero non primo, per esempio 6. L'operazione di composizione sia il prodotto, e quindi l'elemento neutro sia la classe dei resti congrui ad 1 (mod. 6). L'assioma di cancellazione non è valido, perchè si ha per esempio:

$$3 \times 2 = 3 \times 4 \pmod{6}$$

ma non è

$$2 = 4 \pmod{6}.$$

Ax.II-6 - Monotonia. Sia G l'insieme delle mantisse razionali, cioè dei numeri razionali minori di 1, identificati rispetto all'operazione di somma con elementi interi. Questa insieme soddisfa a tutte le proprietà precedenti, ma ammette dei divisori dello zero.

Ax.III - Completezza dell'ordinamento. Siano $\xi = (x,x')$ ed $\eta = (y,y')$ due coppie ordinate di numeri razionali; queste possono essere interpretate per esempio come coppie di elementi di vettori appartenenti ad un piano. Assumiamo come legge di composizione e come elemento neutro quelli abitualmente assegnati dalla teoria della somma dei vettori del piano; poniamo poi:

$$\xi \leq \eta =_{df} \quad x \leq x' \ \& \ y \leq y'.$$

Con questa definizione della relazione «=» si possono avere, come è noto, delle coppie di vettori non confrontabili tra loro.

Ax.IV - Divisibilità. Se si considera l'insieme dei numeri naturali e si assume come legge di composizione la operazione di somma abituale si riesce a soddisfare a tutti gli assiomi precedenti meno che a questo.

Ax.V - Continuità. Se si assume come insieme Gr quello dei numeri razionali, allora può avvenire che un insieme superiormente limitato di razionali non possegga un estremo superiore razioinale, come si sa dai ragionamenti che conseguono alla dimostrazione del teorema di Pitagora.

7 LOGICA NATURALE E LOGICA SIMBOLICA.

CARLO FELICE MANARA

§ 1. LA LOGICA

Non intendiamo dare qui, all'inizio della nostra trattazione, una definizione astratta e generale della logica; il Lettore potrà farsi un'idea di questa dottrina seguendoci nella esposizione delle nostre idee.

Volendo tuttavia cercare di delimitare almeno provvisoriamente il significato del termine e di descrivere meglio il suo ambito, potremmo dire che *la logica è l'insieme delle dottrine che si occupano delle regole per ben ragionare*. Pare ovvio e chiaro che noi siamo tenuti a ben ragionare ogni volta che cerchiamo la verità; ma si può osservare che la ricerca della verità può essere fatta con vari metodi e con vari atteggiamenti: ciò è dimostrato dalla esistenza delle varie scienze, ognuna delle quali ha i suoi canoni, e ricerca la verità per diverse strade, a seconda del proprio oggetto e del proprio punto di vista. Così ci sono le scienze della natura, che si occupano della materia inorganica, non vivente, e quelle che si occupano del vivente. Ci sono le scienze dell'uomo che si occupano di ciò che è avvenuto, secondo vari punti di vista, di ciò che l'uomo sceglie e dei suoi comportamenti.

Esula dai nostri scopi il dare qui una descrizione completa, una analisi esauriente ed una classificazione di tutte le scienze; ci limitiamo ad osservare che ognuna di esse, nel cercare la verità secondo i propri metodi, mira al possesso certo di questa verità, e che questa certezza può avere vari gradi, a seconda delle varie scienze e dei loro oggetti: la certezza della conoscenza che ci dà una dimostrazione matematica è ovviamente diversa dalla certezza con cui possiamo raggiungere la verità nella Storia. Ci pare tuttavia di poter dire che ogni scienza raggiunge il proprio grado di certezza attraverso un procedimento che tende alla spiegazione, alla motivazione delle cose che ci appaiono. In altre parole, noi pensiamo che la pura elencazione di fatti, anche accertati, la pura raccolta di quelli che si chiamano anche «protocolli» (cioè di informazioni del tipo «L'osservatore tal dei tali ha visto, nel tale istante e nel tale luogo il tale fenomeno») non è ancora qualificabile come conoscenza scientifica: le informazioni che ci dà, per esempio, l'elenco telefonico di una città, anche se sono certe e degne di fiducia, non sono ancora qualificabili come conoscenze scientifiche. Ci pare infatti di poter dire che una delle circostanze che costituiscono essenzialmente la conoscenza scientifica, accanto alla certezza delle informazioni, sia la motivazione, la spiegazione di esse.

Per ricercare tale spiegazione ogni scienza ha i suoi propri metodi; ma crediamo che si possa affermare che ogni scienza segue una procedura che analizzeremo presto, e che ci condurrà a precisare il compito ed il significato della logica nella nostra conoscenza.

§ 2. LA DEDUZIONE

Abbiamo affermato che, a nostro parere, una delle caratteristiche della conoscenza scientifica consiste nella ricerca di certezze che in qualche misura siano motivate. Vedremo subito che questa ricerca viene fatta da ogni scienza con delle procedure che coinvolgono quasi sempre un momento in cui entra necessariamente una operazione logica che viene chiamata «*deduzione*».

Ritorniamo per il momento alla descrizione che abbiamo dato della logica come dottrina che insegna a ragionare bene; e — potremmo aggiungere qui — come dottrina che insegna a costruire degli enunciati che noi accettiamo come veri.

Nasce qui una prima suddivisione della logica, suddivisione che trae la sua origine dalla analisi dei motivi che ci inducono ad accettare un enunciato come vero: tali motivi sono sostanzialmente di due tipi; perché noi possiamo accettare come vero un enunciato in forza del suo contenuto, perché dice delle cose vere, direttamente constatabili da noi o da un essere umano degno di fiducia, a proposito di cose esistenti o di fatti avvenuti. Oppure possiamo accettare come vero un enunciato perché è il risultato di una dimostrazione, cioè perché è collegato, con determinate regole a certi altri enunciati, che sono stati accettati come veri.

La parte della logica che analizza e discute i criteri per formare degli enunciati veri in forza del loro contenuto, delle cose che dicono, viene abitualmente chiamata «*Logica materiale*» (o anche «logica major» con una espressione latina classica). Questa parte è a stretto contatto con l'epistemologia e con le scienze particolari; invero ognuna di queste ha come scopo la ricerca della verità e la sua presentazione, attraverso degli enunciati e comunque dei mezzi di comunicazione che trasmettono la verità.

La parte della logica che analizza e discute le regole che si debbono seguire per costruire degli enunciati validi a partire da altri accertati come tali viene chiamata «*Logica formale* (o anche «logica minor» con una espressione latina classica).

Così, per esempio, spetta alla Geografia decidere se è vera la seguente proposizione:

«Parigi è la capitale della Francia».

Analogamente spetta all'Antropologia decidere se è valida la seguente proposizione:

«Tutti i milanesi sono biondi»;

ma spetta alla Logica formale il decidere se il seguente ragionamento è valido formalmente:

«Tutti i lombardi sono biondi;
Tutti i milanesi sono lombardi;
Dunque tutti i milanesi sono biondi».

Ripetiamo che spetta alla logica il decidere sulla validità *formale* del ragionamento, perché per quanto riguarda la validità materiale la conclusione è chiaramente falsa.

Se poi gli oggetti di cui si occupa la logica formale, e i suoi procedimenti, vengono descritti schematicamente con simboli sui quali si opera nel modo tipico della matematica, si ottiene quella particolare codificazione della logica che prende il nome di *logica simbolica* o *logica matematica*; cominceremo ad affrontare questo aspetto nel prossimo § 4.

Ci interessa ora mettere in evidenza l'importanza che ha la logica in ogni procedimento conoscitivo che voglia avere i caratteri di scienza, cioè che ricerchi una conoscenza almeno tendenzialmente certa, motivata e spiegata, della realtà che noi osserviamo.

A tal fine vorremmo analizzare in forma molto schematica il procedimento che ci conduce ad una conoscenza di questo tipo distinguendo in esso quattro fasi principali che potrebbero essere enunciate come segue:

1) osservazione;
2) formulazione di ipotesi di spiegazione;
3) deduzione delle conseguenze dalle ipotesi formulate;
4) verifica delle conseguenze con altre osservazioni.

È chiaro che senza la fase 1) non si potrebbe neppure iniziare la conoscenza; a seconda poi dei vari oggetti e dei vari livelli di spiegazione la fase 1) può avere moltissime specificazioni. Spesso per esempio nelle scienze più evolute la fase 1) comporta numerosi esperimenti che possono essere ripetuti variando le circostanze e le situazioni, in modo da rendere sempre più chiari e distinti i fenomeni che si vogliono spiegare.

Ma la ripetibilità dell'esperimento che conduce alla osservazione non sempre è possibile; non si può avere per esempio nelle scienze della osservazione pura, come la geografia o l'astronomia; non si può avere nelle scienze che riguardano l'uomo, per esempio la storia o la sociologia, nella maggior parte dei casi. Tuttavia noi pensiamo che sia troppo restrittivo negare il carattere di scienze a queste dottrine per il solo pretesto che le loro osservazioni non possono scaturire, di fatto o anche in diritto, da una grande massa di esperimenti ripetuti in laboratorio. Noi crediamo invece che anche queste dottrine abbiano diritto ad essere considerate come delle scienze a pieno titolo, perché anch'esse ricercano la spiegazione delle cose che osservano, anche se questa spiegazione ha un grado diverso di certezza rispetto a quello posseduto dalla fisica o dalla chimica.

La fase 2) è pure essenziale in ogni conoscenza che voglia essere scientifica, perché è il fondamento della spiegazione che forma il carattere essenziale della scienza.

Notiamo che la formulazione di una ipotesi assume quasi sempre la forma seguente: «Le cose si presentano a noi così e così perché prima è accaduto questo e quest'altro, oppure perché la costituzione della materia ha queste e queste altre caratteristiche».

Notiamo inoltre che il contenuto delle ipotesi esplicative che vengono provvisoriamente formulate non è mai direttamente osservabile; invero, se potessimo osservare ciò che enunciamo con le ipotesi, queste sarebbero a loro volta delle osservazioni, che debbono essere spiegate.

La fase 3) è pure essenziale per la esistenza di una spiegazione, perché è quella che fa passare dal contenuto delle ipotesi, che — ripetiamo — non è direttamente osservabile, ad altri enunciati i cui contenuti sono direttamente osservabili durante la fase 4), che è costituita dall'insieme delle osservazioni di controllo o di verifica delle ipotesi enunciate.

Ora possiamo osservare che è compito tipico della logica, ed in particolare della logica formale, l'accertare che la fase 3) si svolga correttamente, perché la fase stessa è sostanzialmente costituita da operazioni di deduzione, che non possono essere direttamente controllate nel loro contenuto, ma sempre e soltanto nella loro forma esteriore.

Invero si potrebbe schematizzare la fase 3) dicendo che essa si presenta sotto la forma del seguente ragionamento: «Se sono vere le ipotesi enunciate, allora si devono avere come conseguenze questi e questi altri fatti, che sono verificabili o controllabili con osservazioni, esperienze, testimonianze o altri procedimenti di accertamento dello stato della realtà».

§ 3. LA CONCEZIONE CLASSICA

Convenzionalmente parleremo di «*logica classica*» per indicare tutto l'insieme di studi di logica che ebbe luogo prima della metà del secolo XIX. La denominazione è puramente convenzionale e largamente generica; tuttavia appare per il momento adeguata per descrivere e designare quell'insieme di dottrine di logica che utilizzano, nella espressione dei concetti e delle relazioni logiche, e nella elaborazione delle deduzioni, i mezzi forniti dai vari linguaggi comuni, cioè le lingue viventi nei periodi e nei paesi nei quali di volta in volta tali studi ebbero a fiorire: per es. la lingua greca, la latina, l'italiana volgare, la francese e così via.

Una semplice riflessione mostra che il linguaggio comune serve all'uomo per molti scopi di comunicazione, e vogliamo qui distinguere tra la comunicazione di concetti e quella di emozioni. Dal nostro punto di vista ci interessa soltanto la comunicazione di concetti e di rapporti tra di essi; la comunicazione di emozioni e di stati d'animo non entra nella considerazione della logica e in particolare nella nostra.

Nelle lingue occidentali la comunicazione di concetti e delle loro relazioni avviene mediante frasi pronunciate o scritte, che contengono delle parole che sono chiamate «termini».

Appare del tutto naturale il desiderio che il significato di ogni termine che si usa sia sempre precisato in modo inequivocabile. Ed a questo proposito appare utile soffermarsi un poco a riflettere sulla operazione mentale e logica che dovrebbe servire a precisare il significato dei termini, operazione che viene chiamata «definizione».

Si chiama abitualmente così una proposizione la quale fornisce il significato di un termine prima ignoto per mezzo di altri termini che si suppongono noti. Per es. se supponiamo che un ascoltatore o un lettore ignori il significato del termine «automobile» potremmo scrivere la seguente definizione:

«automobile è un veicolo da trasporto a quattro ruote, destinato a viaggiare su strada, ed avente un motore che gli permette di spostarsi senza interventi di forze esterne».

Con questa proposizione, o con altre più precise e circonstanziate, possiamo pensare di aver fatto conoscere il significato del termine «automobile» alla persona che prima non lo conosceva o che lo possedeva soltanto in forma approssimata.

È appena necessario ripetere che, affinché il procedimento possa essere considerato ragionevole, è necessario che nella proposizione scritta figurino dei termini che si suppongono noti nei loro significati: tali sono per es. i termini: «quattro, ruote, strada, viaggiare, spostarsi ecc.». È chiaro infatti che se cercassimo di spiegare e precisare il significato di un termine ignoto per mezzo di altri termini che non sono conosciuti precedentemente nei loro significati, il nostro discorso non potrebbe raggiungere lo scopo prefissato.
Scende di qui che non è possibile definire tutti i termini che si utilizzano nel discorso, mediante il linguaggio comune: in altre parole vi sono alcuni termini il cui significato è acquisito o si intende acquisito mediante quella che viene chiamata la «definizione ostensiva», cioè, come dicevano i medievali, «per additamentum»: mostrando all'interlocutore l'oggetto mentre si pronuncia o si scrive il termine linguistico che lo simboleggia.

Tale sarebbe il procedimento che dovremmo adottare se per es. dovessimo incominciare a comunicare con uno straniero che non conosce nessuna parola della nostra lingua e della cui lingua, reciprocamente, noi non conosciamo alcuna parola. A ben riflettere, tale è anche il procedimento con il quale il bambino impara a parlare; imitando chi convive con lui, correggendosi, acquisendo via via con l'uso e la pratica i nomi delle cose che lo circondano e le espressioni che significano le azioni che egli compie.

Non pare che sia possibile un procedimento diverso per comunicare dei concetti, almeno in una prima fase di apprendimento.

Quando si studia la logica quindi, ma anche quando si studia una scienza qualesivoglia, cioè ogni volta che si cerca di dare una sistemazione razionale delle nostre conoscenze e dei nostri concetti, è necessario supporre che il nostro interlocutore conosca il significato di un certo numero di termini che noi utilizziamo per comunicare verbalmente e sul cui significato noi ci accordiamo con lui.

La stessa procedura è seguita, a ben riflettere, in ogni dizionario, il quale abitualmente non fa che spiegare il significato di certi termini mediante quello di altri che il compilatore del dizionario ritiene noti. Pertanto si potrebbe dire che un dizionario logicamente ben fatto dovrebbe portare all'inizio, senza spiegazione né definizione, un elenco dei termini il cui significato non verrà spiegato, e si ritiene noto al lettore. In mancanza di che il dizionario si riduce ad essere un elenco di sinonimi dei termini, che innescano una serie di rimandi la quale si chiude su se stessa senza fornire alcuna spiegazione: per es. si otterrebbe una situazione simile con un dizionario che al termine «salto» portasse: «vedi 'vedi balzo'» ed al termine «balzo» portasse «vedi 'salto'».

Tutte queste esigenze sono scarsamente rispettate nella pratica quotidiana, e nella stesura dei dizionari che si trovano in commercio. Tuttavia è necessario prenderle in considerazione quando si vuole fare una analisi rigorosa del nostro modo di pensare e di comunicare i nostri pensieri. In questo caso infatti è di regola che si indichi esplicitamente e chiaramente quali sono i termini che si ritengono noti nel loro significato; o meglio, quali sono i termini che non vengono definiti mediante una proposizione del tipi di quella che abbiamo scritto poco fa, e che invece conducono semplicemente ad un procedimento di verifica del fatto che gli interlocutori, nei casi concreti e particolari che si presentano, conferiscano lo stesso significato ai termini stessi e li usino nello stesso modo. Abitualmente i termini che non vengono definiti mediante un discorso del tipo di quello che abbiamo fatto poco fa a proposito del termine «automobile» vengono chiamati «termini primitivi».

A questo proposito osserviamo inoltre che un determinato termine non è primitivo «in sé»; il fatto che esso sia assunto come primitivo in una certa trattazione non esclude che lo stesso termine possa essere definito, quando si assumano come primitivi altri termini in numero sufficiente; la cosa che interessa qui mettere in evidenza è che non si può fare a meno, in una esposizione rigorosa, di assumere certi termini come noti senza definizione. Ma quali siano questi termini quale sia il loro numero non può essere stabilito a priori; la loro scelta costituisce, come dice un Autore, un «atto di imperio del trattatista». Ed intendiamo indicare con questa espressione una scelta che non può essere giustificata mediante una dimostrazione logica, nel senso abituale del termine.

Ciò che abbiamo detto fin qui si applica in particolare a certi termini della logica e della matematica dei quali dovremo far uso più tardi; si applica per esempio al termine «insieme» e ad altri collegati con questo, che avremo occasione di utilizzare in seguito.

Considerazioni analoghe possono essere fatte a proposito dei termini primitivi che vengono utilizzati nella analisi dei fondamenti della aritmetica e della geometria.

Si potrebbe dire che proprio le ricerche sui fondamentali di quest'ultima scienza abbiano dato luogo a quelle precisazioni che abbiamo cercato di esporre nelle pagine precedenti. Invero proprio la geometria ha fornito i primi esempi di quel procedimento che viene abitualmente chiamato di «definizione implicita» dei termini, o anche «definizione per postulati» oppure anche da qualche Autore «definizione d'uso».

Vorremmo ricordare infatti che nella concezione classica che si aveva della geometria, questa era considerata come una scienza caratterizzata dai suoi contenuti: una scienza che parla di certe cose, che osserva le proprieta evidenti dei suoi oggetti e dimostra rigorosamente, mediante il ragionamento, le proprietà che sono meno evidenti e più riposte.

Questa concezione classica è stata demolita dalla scoperta delle cosiddette «geometrie non-euclidee», cioè dalla scoperta che anche senza ammettere come vero il postulato euclideo della unicità della parallela mandata ad una retta da un punto fuori di essa, si potevano costruire delle dottrine che non presentavano nulla di contradditorio.

L'analisi logica alla quale i matematici furono costretti da questa scoperta li condusse a convincersi che non è possibile definire tutto, e che è necessario accettare certi concetti come primitivi e rinunciare a definirli mediante discorsi del tipo classico; occorre invece accettare che tali concetti siano in certo modo circoscritti da postulati, cioè da proposizioni che vengono enunciate senza dimostrazione. Va ricordato tuttavia che, quando si adotti questo punto di vista, sorgono dei problemi logici di notevole importanza: invero se si rinuncia ad un aggancio alla realtà esteriore come fondamento del rigore ultimo della nostra conoscenza, e si accetta che le proposizioni iniziali di una dottrina siano scelte con criteri di una certa libertà, nasce il problema di garantire la non contradditorietà di tali proposizioni. Questo problema è stato occasione di notevoli studi di logica matematica nella prima metà del nostro secolo, studi che hanno avuto il loro culmine nei classici teoremi di K. Gödel.

Non ci è possibile proseguire ora in questa direzione; vorremmo aggiungere che, nel caso delle scienze particolari, quando non si tratti di concetti fondamentali, la definizione di un ente viene ottenuta assegnando delle classi sempre meno estese a cui l'ente appartiene.

Ci pare che sia tipico a questo proposito il caso della zoologia, nella sua impostazione classica, la quale suddivide gli animali secondo insiemi, ciascuno contenuto nel precedente, che dànno la possibilità di determinare nella maggior parte dei casi la specie a cui l'animale considerato appartiene. Come è noto, tali insiemi sono chiamati successivamente: tipo, classe, ordine, famiglia, genere, specie, con la possibilità di determinare anche dei sottotipi, delle sottoclassi, delle sottospecie e così via.

§ 4. LA LOGICA SIMBOLICA

Alla espressione «*logica simbolica*» vengono attribuiti significati non sempre costanti ed uguali tra loro. Invero a stretto rigore di termini, ogni parola, pronunciata o scritta, è simbolo; e quindi anche la logica classica, che utilizza le parole ed i termini del linguaggio comune, può essere considerata una dottrina che opera con simboli.

Noi daremo qui alla espressione «logica simbolica» un significato alquanto generico, designando così la dottrina che tratta della rappresentazione diretta (senza passare attraverso i mezzi del linguaggio comune), con simboli artificiali appositamente costruiti, dei concetti e delle loro relazioni; e che studia le leggi che reggono la formazione e la trasformazione di espressioni costituite da insiemi di simboli elementari.

Abbiamo cercato di mettere in evidenza le difficoltà che si incontrano quando si voglia impiegare il linguaggio comune nella scienza. Tali difficoltà si manifestano in modo particolare nel fatto che i termini del linguaggio comune non hanno sempre un unico significato, ed anzi il significato di un termine viene quasi sempre precisato solo facendo riferimento al contesto.

Analoghe difficoltà si incontrano quando si voglia utilizzare il linguaggio comune nella deduzione. Queste osservazioni possono giustificare in parte la nascita della logica simbolica; invero in questa dottrina ogni simbolo è artificiale e quindi il suo significato è unico e stabile, e precisamente è quello che gli è stato dato quando il simbolo è stato introdotto. Inoltre, come vedremo, le operazioni che conducono da una espressione ad un'altra sono rette da leggi precise, in modo tale che il procedimento deduttivo si avvicina sempre più all'idea della deduzione matematica, cioè ad un calcolo, intendendo questa parola come un insieme di operazioni eseguite con determinate regole su certi simboli, per ottenerne degli altri.

Pertanto, in queste condizioni, il controllo dei procedimenti deduttivi diventa molto più facile, e addirittura può essere affidato a delle macchine, le quali garantiscono quindi la applicazione disinteressata delle procedure, senza che la considerazione dei significati dei simboli possa fuorviare le operazioni dal loro fine.

Ci si avvicina così a quell'ideale di deduzione che già G.G. Leibnitz aveva preconizzato nelle sue opere come si evince, per esempio dal testo seguente, tradotto da noi liberamente dall'originale latino:

«...pertanto, quando vi fossero delle divergenze di opinione, non sarà necessario fare delle discussioni tra dotti, non più di quanto esse non siano necessarie tra due esperti di computisteria. Basterà infatti sedersi ad un tavolo, con la penna in mano (chiamando, se si vuole, un amico ad assistere) e dire 'calcoliamo'...».

Vale tuttavia la pena di osservare che il linguaggio comune non può essere totalmente soppresso, perché il significato dei simboli artificiali e convenzionali, che vengono utilizzati per rappresentare i concetti, deve essere precisato e spiegato facendo ricorso al linguaggio comune, che viene supposto esistente e compreso nei suoi procedimenti e nei suoi significati. Lo stesso si dica delle operazioni di trasformazione delle espressioni simboliche. Pertanto, se ci si pone da questo punto di vista, si potrebbe asserire con ragione che non esiste lingua in cui ogni termine abbia un significato che sia completamente libero da ogni contesto.

Va detto inoltre che, anche accettando questa osservazione, la presentazione del significato dei simboli artificiali e delle loro leggi è bensì fatta in linguaggio comune (e questa circostanza è insopprimibile ed ineliminabile) ma l'utilizzazione del linguaggio comune viene fatta in una parte ben precisa e delimitata della trattazione e della esposizione di una teoria.

Prima di presentare il calcolo delle proposizioni non analizzate ci soffermeremo ad esporre alcune convenzioni simboliche, oggi spesso utilizzate nei trattati di matematica. Non si tratta di notazioni che appartengono al calcolo delle proposizioni, ma di convenzioni molto diffuse, che permettono di risparmiare spazio e parole e quindi, da questo e da altri punti di vista, possono essere considerate come delle notazioni rudimentali di logica simbolica.

Tra queste ricordiamo anzitutto il simbolo «ε» che si usa per indicare l'appartenenza di un certo elemento ad un determinato insieme; in secondo luogo ricordiamo il simbolo « $\forall$ (analogo ad un A maiuscolo rovesciato) che viene spesso utilizzato per indicare l'aggettivo «tutti». Per esempio, con notazioni di questo tipo, indicato con N l'insieme dei numeri interi naturali, si trova scritto

$$x^2 \geq 0, \qquad \forall\, x \,\varepsilon\, N$$

formula che si legge: il quadrato di un intero è non minore di zero, quale che sia l'intero considerato.

Si utilizzano poi di frequente delle notazioni convenzionali per indicare i rapporti tra proposizioni o tra insiemi di proposizioni, notazioni che sono utili per indicare la dipendenza logica di una o più proposizioni da certe altre, prese come ipotesi. Così nell'uso abituale della matematica di oggi, indicate con H e T due proposizioni, si suole scrivere

(1) $$H \Rightarrow T$$

per indicare che dalla proposizione H, assunta come ipotesi e pertanto accettata come vera, si può dimostrare la proposizione T. La dimostrazione che conduce a garantire la validità della proposizione T dalla validità accettata della H viene chiamata «Teorema»; la H viene chiamata «ipotesi» del teorema e la T viene chiamata «tesi» del teorema.

Questa nomenclatura — abbiamo detto — viene abitualmente adottata in relazione a proposizioni della matematica, ma a rigore di termini non è esclusiva di questa scienza.

La formula (1) viene abitualmente letta con frasi del tipo «dalla H si deduce T», oppure «l'ipotesi H implica la tesi T»; tuttavia vengono anche utilizzate delle espressioni come le seguenti: «la H è condizione sufficiente per la T» ed anche «la T è condizione necessaria per la H».

Così si possono avere per esempio le proposizioni seguenti:

H: la rappresentazione di un numero intero n con le abituali convenzioni posizionali delle cifre arabo-indiane ha come ultima cifra a destra lo zero;

T: il numero n è divisibile per 5.

In questo caso per esempio la (1) viene letta dicendo che «perché un numero sia divisibile per 5 è sufficiente che la sua rappresentazione decimale porti come ultima cifra a destra lo zero»; oppure «se la rappresentazione decimale di un numero n porta come ultima cifra a destra lo zero, allora il numero n è necessariamente divisibile per 5».

Spesso accanto alla proposizione (1) si prendono in considerazione altre proposizioni che sono collegate con la (1). La prima proposizione che prenderemo in considerazione è la

(2) $$T \Rightarrow H$$

questa proposizione viene chiamata *inversa* della (1), così come la (1) stessa viene chiamata *inversa* della (2).

Ovviamente non è sempre detto che quando una delle proposizioni vale, valga anche l'altra; ciò risulta evidente dall'esempio che abbiamo addotto poco fa, perché è chiaramente sufficiente che il fatto che la rappresentazione di un dato intero porti come ultima cifra a destra lo zero perché il numero stesso sia divisibile per 5; ma non è affatto necessario, perché la divisibilità per 5 si realizza anche quando l'ultima cifra a destra invece che lo zero sia il 5.

Quando valgono insieme la (1) e la (2) (il che, ripetiamo, non avviene sempre) si suol dire che la H è condizione necessaria e sufficiente perché sussista la (2) e viceversa la (2) è condizione necessaria e sufficiente perché sussista la (1). Si suole esprimere questa relazione tra queste due proposizioni scrivendo simbolicamente

(3) $$H \Leftrightarrow T\,.$$

La seconda proposizione che si prende in considerazione accanto alla (1) è la seguente:

(4) $$\text{non } H \Rightarrow \text{non } T$$

cioè «dalla negazione della H consegue la negazione della T». Nelle trattazioni abituali si suole indicare con il simbolo

(5) $$\neg H$$

la proposizione che si ottiene negando la H. Così per es. nell'esempio precedente, la proposizione $\neg$ H potrebbe essere enunciata nel modo seguente:

«La rappresentazione decimale del numero n ha come ultima cifra a destra una cifra diversa dallo zero».

Con questa convenzione la (4) viene scritta nella forma seguente:

(6) $$\neg H \Rightarrow \neg T$$

questa proposizione viene anche chiamata «opposta» della (1).

Appare chiaro dall'esempio esposto che dalla validità della (1) non si può dedurre la garanzia della validità della (6). Invero — con riferimento all'esempio considerato — il fatto che l'ultima cifra a destra della rappresentazione di un numero sia diversa da zero non porta come conseguenza che il numero stesso non sia divisibile per 5. Ciò infatti può avvenire quando l'ultima cifra a destra, pur essendo diversa da zero, è uguale a 5.

Infine si può prendere in considerazione la proposizione

(7) $$\neg T \Rightarrow \neg H$$

che viene chiamata la «contronominale» della (1).

È chiaro che le due proposizioni (2) e (7) sono opposte tra loro.

Quando due proposizioni stanno tra loro nella relazione (3) e pertanto la validità di una esse è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'altra si suol dire che sono «equivalenti».

Si verifica che le due proposizioni (1) e (7), cioè una proposizione e la sua contronominale sono equivalenti; si esprime questa circostanza scrivendo

(8) $$(H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg T \Rightarrow \neg H).$$

di conseguenza in matematica spesso invece di dimostrare una proposizione si dimostra la sua contronominale.

Così per es. in Geometria euclidea invece di dimostrare il teorema «Se un quadrangolo convesso ha le diagonali di uguale lunghezza è un rettangolo» si dimostra «Se un quadrangolo convesso ha le diagonali di lunghezza diversa esso certamente non è un rettangolo».

Inoltre vale ovviamente la «legge della doppia negazione» che viene espressa nella forma

$$\neg(\neg H) \Leftrightarrow H.$$

Riassumendo quindi i modi di esprimersi abituali della Matematica (ma anche del linguaggio comune) ed il simbolismo elementare spesso adottato, si ha che le proposizioni

$$H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad T \Rightarrow H$$

vengono chiamate «inverse» tra loro; dalla validità dell'una non si può dedurre la validità dell'altra; ma quando ciò avviene esse vengono dette «equivalenti» e si scrive la (3). Le proposizioni

$$H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad \neg H \Rightarrow \neg T$$

vengono dette «opposte» tra loro. Anche in questo caso dalla validità dell'una non si può dedurre la validità dell'altra. Tuttavia se in particolare vale la (3) vale anche la

$$\neg H \Rightarrow \neg T.$$

Infine le due proposizioni

$$H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad \neg T \Rightarrow \neg H$$

vengono chiamate «contronominali», e per esse vale la (8).

§ 5. LE PROPOSIZIONI NON ANALIZZATE ED I CONNETTIVI

Ciò che abbiamo esposto nel § precedente costituisce — come abbiamo detto — soltanto un abbozzo di utilizzazione dei simboli nella rappresentazione dei rapporti logici tra posizioni; pertanto — ripetiamo — si tratta di un simbolismo che è piuttosto un insieme di abbreviazioni convenzionali che un vero e proprio sistema di deduzione.

Inizieremo ora ad esporre il calcolo delle proposizioni non analizzate, che costituisce uno dei primi capitoli della logica simbolica moderna.

Esistono in proposito vari tipi di notazioni e di convenzioni, tra i quali ricorderemo le notazioni della scuola anglosassone, che hanno avuto la loro origine nelle convenzioni del matematico italiano G. Peano e nei lavori di Whitehead e Russel; le notazioni della scuola polacca e le notazioni della scuola tedesca, che ha avuto la sua origine nei lavori del matematico D. Hilbert e dei suoi allievi. Noi utilizzeremo queste ultime notazioni, ricordando che esistono anche altre convenzioni, che vengono utilizzate per esempio dagli studiosi e costruttori di circuiti elettrici e delle macchine elettroniche per la elaborazione della informazione e per il calcolo.

Introdurremo un primo insieme di simboli, ognuno dei quali ha significato preso singolarmente; un simbolo cosiffatto viene abitualmente chiamato «*categorematico*».

Sceglieremo come simboli categorematici gli elementi di un alfabeto, intendendo questo termine nel modo più convenzionale e generico, cioè come designante un insieme di simboli distinguibili senza ambiguità uno dall'altro, che non hanno significato «naturale», ma ai quali viene spesso assegnato convenzionalmente un significato di volta in volta a seconda che occorra, in una data trattazione ed in una data teoria.

Noi utilizzeremo qui come elementi del nostro alfabeto le lettere dell'alfabeto latino in carattere maiuscolo; osserviamo tuttavia che tali simboli possono essere in numero grande a piacere e quindi, invece della convenzione da noi qui scelta (e qui sufficiente ai nostri fini) si potrebbe convenire di adottare una sola lettera per es. la A, con un indice numerico suffisso, per es.

$$A_1, A_2, A_3, ...;$$

saremo così in grado di costruire un numero interminato di simboli diversi e perfettamente riconoscibili.

Nella trattazione che seguirà, con le lettere dell'alfabeto converremo indicare delle proposizioni non analizzate. Con questa espressione noi intendiamo dire che, data una proposizione, rinunciamo a distinguere in essa un soggetto, una copula verbale ed un predicato, come si fa nella logica classica, che si avvale del linguaggio comune; ci limiteremo invece a prendere in considerazione quello che chiameremo il «valore di verità» della proposizione, cioè il fatto che essa sia vera oppure falsa.

Vengono utilizzate varie notazioni per indicare i valori di verità di una proposizione; così si trova presso alcuni autori la coppia di simboli «V» e «F» per indicare il valore di verità rispettivamente vero oppure falso; talvolta si trovano anche le lettere «T» e «F», dalle iniziali delle parole inglesi che indicano il vero oppure il falso.

Noi utilizzeremo convenzionalmente dei simboli numerici per indicare i valori di verità di una proposizione.

Tali simboli saranno i numeri 1 e 0, adottati convenzionalmente per indicare i valori di verità rispettivamente vero o falso. Converremo anche di associare ad ogni lettera maiuscola che indica una proposizione la stessa lettera, in carattere minuscolo, per indicare il valore di verità.

Così per es. se A, B, C sono delle lettere con le quali indicheremo certe proposizioni, con a, b, c rispettivamente indicheremo dei numeri che possono prendere soltanto i valori uno e zero e che indicano i valori di verità delle proposizioni corrispondenti.

Quindi scrivendo per esempio

$$a = 1$$

indicheremo che il valore di verità della proposizione A è 1, e quindi affermeremo che la proposizione stessa è vera.

Date che siano certe proposizioni, che chiameremo per il momento «semplici», ci interessa poterne costruire delle altre, che diremo «composte» con quelle; e ci interessa qui dare delle regole per costruire tali proposizioni composte e per determinare i loro valori di verità, dati che siano i valori delle proposizioni componenti.

Per costruire le proposizioni composte faremo uso di certi simboli, ognuno dei quali non ha senso quando sia preso singolarmente, ma lo assume quando viene utilizzato con certe regole insieme con i simboli categorematici; un simbolo cosiffatto viene abitualmente chiamato «*sincategorematico*». Nel caso che ci interessa, i simboli sincategorematici che utilizzeremo vengono anche chiamati «connettivi».

Il primo simbolo sincategorematico che prenderemo in considerazione è il simbolo di negazione. Esso sarà rappresentato ponendo il simbolo «$\neg$» davanti al simbolo della proposizione che si intende negare.

Pertanto, data per es. la proposizione indicata con A, la sua negazione sarà indicata con il simbolo

$$\neg A$$

da leggersi «non A»; questa proposizione sarà falsa se la A è vera, vera se la A è falsa.

Il simbolo di negazione è l'unico simbolo sincategorematico che opera su una unica posizione. Presenteremo qui altri connettivi che ci serviranno per costruire delle composizioni composte con due altre.

Abbiamo detto poco fa che ci interessa soltanto il valore di verità di una proposizione; quindi, se una data proposizione è composta con due altre (e ovviamente con un connettivo) i casi che si possono presentare sono quattro soltanto.

Stabiliremo un ordine convenzionale, che manterremo sempre nel seguito, per enunciare tutti i casi possibili di valori di verità che possono essere assunti da due proposizioni A e B con le quali viene composta una terza proposizione. Tale ordine convenzionale è dato dalla seguente tabella:

(1)

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0

Di conseguenza ogni connettivo sarà determinato dai valori di verità che la proposizione corrispondente assume quando i valori di verità delle due proposizioni componenti sono dati nell'ordine che è stabilito dalla tabella (1), che non ripeteremo più nel seguito, limitandoci a dare i quattro valori di verità che corrispondono ai casi enumerati nell'ordine scelto.

Si suol dire che i quattro valori di verità che corrispondono ad un determinato connettivo formano la «matrice di verità» del connettivo stesso.

Enumereremo qui di seguito i connettivi che sono di uso più frequente nella logica delle proposizioni.

1) Connettivo «*et*» (che viene anche indicato col termine inglese «and»); la proposizione che si ottiene da altre due date, mediante l'utilizzazione di questo connettivo, viene abitualmente indicata ponendo il simbolo «$\wedge$» tra i simboli delle due; date per es. le proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

(2) $$A \wedge B$$

da leggersi «A et B» oppure «A and B».

La matrice di verità della proposizione (2) è data dalla seguente tabella, nella quale — ripetiamo — i casi sono elencati nell'ordine dato dalla tabella (1):

(3) $$1, 0, 0, 0;$$

pertanto la proposizione (2) è vera nel solo caso in cui sono vere entrambe, la A e la B.

La operazione che, a partire dalle due proposizioni A e B conduce alla proposizione composta (2) viene chiamata «congiunzione» oppure anche «prodotto logico» delle due proposizioni.

2) Connettivo «*vel*» (che viene anche indicato con il termine inglese «or»); la proposizione che nasce da due date in forza di questo connettivo viene indicata ponendo il segno « $\vee$ » tra i simboli delle due proposizioni; date le due proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

(4) $$A \vee B$$

da leggersi «A vel B» oppure «A or B». I valori di verità della proposizione (4) sono dati dalla seguente tabella:

(5) 1, 1, 1, 0;

pertanto la proposizione (4) è vera quando anche una sola delle due proposizioni A e B è vera; in altre parole, la proposizione (4) è falsa nel solo caso in cui siano false entrambe, la A e la B, e vera in tutti gli altri casi.

La operazione che, a partire dalle due proposizioni semplici A e B conduce alla proposizione composta (4), viene anche chiamata «alternativa» o anche «somma logica» delle due proposizioni.

3) Connettivo «*freccia*». La proposizione che nasce da due date mediante questo connettivo viene indicata ponendo una freccia «$\rightarrow$» tra i simbolo delle due; pertanto, date le due A e B la proposizione composta si scriverà

(6) $$A \rightarrow B.$$

La lettura del simbolo (6) viene fatta in vari modi; si usa leggere per es. «Se A allora B» ed il simbolo *freccia* viene chiamato *simbolo di implicazione materiale*.

Si usa anche dire che la proposizione A è l'antecedente della implicazione materiale, e che la B è il conseguente.

I valori di verità della proposizione (6) sono dati dalla tabella seguente:

(7) 1, 0, 1, 1.

Questi valori di verità sono gli stessi della proposizione

(8) $$\neg A \vee B;$$

pertanto alcuni autori considerano la proposizione (6) come una forma diversa della proposizione (8)

4) Connettivo «*doppia freccia*». La proposizione che si ottiene mediante la utilizzazione di questo connettivo viene indicata ponendo il segno «$\leftrightarrow$» tra i simboli delle due proposizioni date; date per es. A e B si scriverà

(9) $$A \leftrightarrow B;$$

simbolo che potremo leggere convenzionalmente «A doppia freccia B» oppure anche «A è equivalente a B».

I valori di verità della proposizione (9) sono dati dalla tabella seguente:

(10) 1, 0, 0, 1;

pertanto la proposizione (9) risulta vera se entrambe la A e la B sono vere oppure se sono entrambe false.

Ciò spiega anche la convenzione di lettura secondo la quale il connettivo doppia freccia viene anche chiamato connettivo di equivalenza.

Notiamo tuttavia che questa lettura può indurre in equivoci e confusioni, perchè non ha lo stesso significato della relazione di equivalenza tra proposizioni che abbiamo indicato nel § precedente con il simbolo convenzionale «$\Leftrightarrow$».

Invero in quel caso si tratta di proposizioni analizzate ognuna delle quali, assunta come ipotesi, può condurre alla dimostrazione dell'altra come tesi, quando ovviamente si intendano conosciute le regole della logica deduttiva e quando anche, in un certo ambito di teoria, si ammettono come note altre proposizioni non ricordate esplicitamente nella enunciazione della equivalenza.

È interessante osservare che i valori di verità delle proposizioni composte che abbiamo ora esaminato si possono anche calcolare con opportune formule a partire dai valori di verità delle proposizioni componenti. Daremo qui di seguito queste formule, intendendo che le operazioni aritmetiche sono eseguite nella aritmetica modulo 2 cioè che ad ogni valore numerico che si ottiene deve essere sostituito il resto della sua divisione per 2.

Anzitutto si verifica che, indicato con *a* il valore della proposizione A, il valore della negazione $\neg A$ è $a + 1$. I valori delle proposizioni composte con i connettivi che abbiamo presentato sono dati dalla Tabella seguente.

Con l'utilizzazione di queste formule è possibile ricondurre la verifica di certe proprietà logiche al calcolo aritmetico, e la soluzione di certi problemi logici alla soluzione di problemi che si possono tradurre in formule e risolvere come dei problemi algebrici, nel senso abituale del termine.

Connettivo	Matrice di verità	Formula che fornisce il valore di verità nell'aritmetica modulo 2
$A \wedge B$	1,0,0,0	ab
$A \vee B$	1,1,1,0	$ab + a + b$
$A \rightarrow B$	1,0,1,1	$ab + a + 1$
$A \leftrightarrow B$	1,0,0,1	$a + b + 1$

§ 6. FORMULE BEN FORMATE E TAUTOLOGIE

Con i connettivi che abbiamo introdotto nel § precedente si possono costruire delle proposizioni composte che contengono diversi connettivi e più di due simboli di proposizione. A tale fine adotteremo la convenzione sull'uso delle parentesi che viene abitualmente adottata in matematica: precisamente intenderemo che una espressione che viene posta tra parentesi deve essere considerata come un tutto unico, ed il suo valore di verità deve essere calcolato prima che venga calcolato il valore di verità delle proposizioni composte, cominciando dalla parentesi più interne. Tuttavia, per evitare il moltiplicarsi di segni di parentesi, si suole anche introdurre una gerarchia convenzionale tra i connettivi analoga a quella esistente tra i segni + e x di somma e prodotto tra numeri. Le regole fissate sono le seguenti:

i) il segno di negazione «$\neg$» si intende operare solo sulla proposizione il cui simbolo segue immediatamente il segno stesso. Così, per esempio, la espressione, già introdotta

(1) $$\neg A \vee B$$

indica l'operazione «*vel*» tra la proposizione «non A» e la proposizione B. Se si volesse negare la proposizione «$A \vee B$» occorrerebbe scrivere:

(2) $$\neg (A \vee B).$$

Esempi analoghi si costruiscono con il connettivo «et» e con i connettivi «freccia» e «doppia freccia».

ii) I connettivi «*freccia*» e «*doppia freccia*» hanno una portata che supera quella dei connettivi «*et*» e «*vel*». Così per esempio la proposizione:

(3) $$A \rightarrow B \wedge A$$

ha il significato che le compete dal connettivo «freccia» che ha come antecedente la proposizione A e come conseguente la proposizione $B \wedge A$.

Se si volesse alterare la portata del connettivo «et» occorrerebbe mettere delle parentesi, per esempio scrivendo

(4) $$(A \rightarrow B) \wedge A.$$

Con le regole precedenti è possibile costruire una proposizione comunque complessa, contenente un numero qualsivoglia di simboli categorematici congiunti da simboli sincategorematici; occorre tuttavia assegnare delle regole che permettono di distinguere una successione di simboli cosiffatti, che conveniamo di accettare come dotata di senso, dalle altre. Una successione di simboli che viene accettata nel nostro calcolo delle proposizioni viene chiamata una «*formula ben formata*», espressione che viene convenzionalmente indicata col simbolo «*fbf*».

Tali regole sono le seguenti:

1) i simboli alfabetici categorematici, che indicano le proposizioni semplici, sono delle fbf;
2) indicata con P una *fbf*, anche $\neg$ P è una *fbf*;
3) indicate con P e Q due *fbf*, anche P $\wedge$ Q e P $\vee$ Q sono delle *fbf*;
4) nessuna altra successione di simboli è una *fbf*.

Con queste regole è possibile costruire delle espressioni di lunghezza qualesivoglia e determinarne i valori di verità, in funzione dei valori di verità delle proposizioni elementari che le compongono.

Per esempio si può considerare la proposizione

(5) $$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B);$$

questa è una fbf, ed i suoi valori di verità, sempre con le convenzioni di ordinamento date dalla Tab. (1) del § precedente sono dati dalla tabella seguente:

0,1,1,0.

Pertanto la proposizione composta (5) risulta vera quando e solo quando una delle due proposizioni A oppure B è vera e l'altra è falsa; essa quindi rende il senso della espressione che nelle frasi latine (ma anche nell'uso della lingua italiana) viene formulata con le parole «aut... aut...».

Analogamente i valori di verità delle proposizioni (3) e (4) sono rispettivamente:

1,0,1,1 e 1,1,0,0.

Tra le proposizioni composte hanno particolare importanza quelle che hanno valore di verità uguale ad 1, quali che siano i valori di verità delle proposizioni componenti. Tali proposizioni vengono spesso chiamate «*tautologie*» ed alcune di queste traducono dei modi validi di ragionare che vengono abitualmente utilizzati anche nella vita comune; pertanto li presenteremo qui collegandoli con i nomi che la logica classica dava a questi schemi validi, anche se questi nomi sono stati dati in contesti ovviamente diversi.

Osserviamo anzitutto che una tautologia che coinvolge una sola proposizione può essere la seguente:

$$\neg A \vee A$$

che può essere anche scritta nella forma

$$A \rightarrow A.$$

La verifica che queste proposizioni hanno valore di verità sempre uguale ad 1 si può fare ricorrendo alle tabelle del § precedente; analoghe consideazioni possono essere svolte a proposito delle proposizioni più complicate che presenteremo nel seguito di questo §.

i) *Modus ponendo ponens*:

$$[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B;$$

ii) *Modus tollendo tollens*:

$$[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A;$$

iii) *Modus tollendo ponens*:

$$[(A \vee B) \wedge \neg A] \rightarrow B;$$

iv) *Modus ponendo tollens*:

$$[\neg (A \wedge B) \wedge A] \rightarrow \neg B;$$

v) *Argumentum «a fortiori»*:

$$(A \wedge B) \rightarrow A;$$

vi) *Reductio ad absurdum* (prima forma):

$$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A;$$

vii) *Reductio ad absurdum* (seconda forma):

$$[A \rightarrow (B \wedge \neg B)] \rightarrow \neg A;$$

viii) *Dilemma costruttivo*:

$$[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B)] \rightarrow C;$$

ix) *Dilemma distruttivo*:

$$\{[A \rightarrow (B \vee C)] \wedge (\neg B \wedge \neg C)\} \rightarrow \neg A;$$

x) infine la seguente tautologia

(6) $$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

traduce in formule il significato dell sentenza che viene espressa in latino dicendo «*ex falso sequitor quodlibet*», che significa che da una premessa falsa si può dedurre qualunque conseguenza, tanto vera che falsa.

Ricordiamo infine due schemi di argomentazione che *non* costituiscono tautologie; pertanto questi schemi *non* rappresentano dei procedimenti conclusivi validi quali che siano i valori di verità delle proposizioni che vi fanno parte; tuttavia essi sono spesso presenti come schemi validi ed utilizzati per trarre delle conclusioni.

Pensiamo quindi che il lettore possa utilmente prendere coscienza della esistenza di questi schemi per poter evitare di utilizzarli, e confutare eventualmente le argomentazioni (ripetiamo, frequenti) che sono fondati su di essi. Tali schemi sono dati dalle proposizioni seguenti:

$$[(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow A,$$

che non è tautologia, perchè ha i suoi valori di verità dati dalla seguente tabella:

(7) 1, 1, 0, 1,

e dalla proposizione:

$$[(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B$$

che non è una tautologia, perchè i suopi valori di verità sono pure dati dalla tabella (7).

Hanno particolare importanza per il seguito certe tautologie che esprimono delle equivalenze tra proposizioni composte e costituiscono quindi le regole di calcolo dell'algebra delle proposizioni. Elenchiamo qui di seguito tali tautologie, invitando il lettore a verificare la loro validità:

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

(legge della doppia negazione);

$$A \Leftrightarrow A \vee A \quad A \Leftrightarrow A \wedge A$$

(propietà di idempotenza dei connettivi «vel» e «et»);

$$\begin{cases} A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \end{cases}$$

(proprietà commutativa dei due connettivi);

$$\begin{cases} A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \\ A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \end{cases}$$

(proprietà associative dei connettivi);

$$\begin{cases} A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{cases}$$

(proprietà distributiva di ciascuno dei connettivi rispetto all'altro);

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, \quad A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A;$$

$$\begin{cases} \neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{cases}$$

(leggi di De Morgan).

Abbiamo dato alle tautologie precedenti dei nomi che fanno riferimento a certe proprietà delle operazioni di composizione delle proposizioni; tali denominazioni fanno capire che è possibile costruire un calcolo delle proposizioni, analogo al calcolo algebrico, il quale permette di trasformare le proposizioni composte, in modo da conservare il valore di verità, in funzione dei valori di verità delle proposizioni semplici componenti.

Pertanto riterremo lecito, in ogni proposizione composta in cui figurasse una delle proposizioni che sono da una parte del segno delle equivalenze che abbiamo scritto sopra, sostituire la proposizione che sta dall'altra parte del segno di equivalenza.

§ 7. ASSIOMI E REGOLE DI DEDUZIONE

Abbiamo finora presentato le operazioni sulle proposizioni con riferimento ai valori di verità; è possibile tuttavia trattare la materia ad un livello più astratto, considerando i simboli categorematici e i connettivi senza riferimento al significato che abbiamo loro attribuito finora. In questo ordine di idee quindi si può introdurre un insieme di simboli con certe leggi di trasformazione, che a partire da certe espressioni che vengono date all'inizio e che vengono chiamate «assiomi», conducono a certe proposizioni costituenti una successione che può essere chiamata «teoria».

Come assiomi possiamo scegliere i tre seguenti:

(1) $$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(2) $$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$$

(3) $$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow [(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B].$$

Da queste espressioni si possono trarre altre quantesivogliano con le seguenti regole:

i) regola di sostituzione: in una espressione è lecito sostituire ad una lettera, in particolare un'altra lettera, o una formula ben formata.

ii) Se nella successione di proposizioni che così si ottiene si ha una formula P e una formula $P \rightarrow Q$, è lecito introdurre la espressione Q nella successione. Questa regola viene spesso richiamata con la espressione «modus ponendo ponens» o anche semplicemente «modus ponens» o anche infine «regola del distacco».

Daremo qui un esempio della applicazione di queste regole, per costruire una espressione che non sta nell'elenco delle proposizioni di partenza.

Per regola i), ponendo nella (1) A al posto di B si ottiene la

(4) $$A \rightarrow (A \rightarrow A).$$

Ponendo, ancora nella (1), al posto di B la formula ben formata $A \rightarrow A$ si ottiene

(5) $$A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A].$$

Ponendo nella (2), al posto di C la lettera A e ponendo al posto della lettera B la formula ben formata $A \rightarrow A$ si ottiene:

(6) $$\{A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (A \rightarrow A)] \rightarrow (A \rightarrow A)\}$$

Da questa, applicando due volte la regola ii), e tenendo conto delle (4) e (5) si ottiene

(7) $$A \rightarrow A$$

formula ben formata che quindi può essere aggiunta all'elenco delle formule che costituiscono la nostra teoria.

La impostazione che abbiamo presentato ora dà un'idea del modo di ragionare, puramente formale, che si può seguire nella trattazione dei problemi riguardanti la deduzione. Tuttavia possiamo chiederci quale sia il rapporto tra la visione che abbiamo ora succintamente presentato e la trattazione che abbiamo dato nei precedenti paragrafi, collegando il concetto di proposizione non analizzata con quello dei valori di verità.

A tal fine chiamiamo «deducibile» ogni formula ben formata che si può ottenere dalle formule iniziali (assiomi) (1), (2), (3) con le operazioni indicate dalle regole i) e ii); per indicare che una formula ben formata P si può ottenere dagli assiomi mediante le regole i) e ii) si suol scrivere la formula convenzionale

(8) $\vdash P$

che si potrebbe leggere: «P è deducibile» (sottointeso dagli assiomi, con la applicazione delle regole di deduzione).

Ora si verifica che, utilizzando le matrici di verità dei connettivi, le proposizioni (1), (2), (3), che abbiamo assunto come proposizioni iniziali, sono delle tautologie, cioè hanno valore di verità 1 quale che sia il valore di verità delle proposizioni componenti.

Questa affermazione può essere enunciata anche per qualunque formula ben formata che si possa dedurre dalle proposizione suddette con l'applicazione delle regole di deduzione; in modo ancora più generale si può dimostrare che, data che sia una formula ben formata, con un numero finito di verifiche si può accertare se essa è una tautologia oppure no.

Questa proposizione si suole presentare sotto forma di un teorema che viene chiamato «Teorema di decidibilità».

Il suo enunciato potrebbe essere dato nella forma seguente:

Teorema – *Data che sia una formula ben formata del calcolo delle proposizioni, è possibile decidere, con un numero finito di operazioni, se essa è una tautologia oppure no.*

Si può anche dimostrare il teorema seguente il quale potrebbe essere enunciato con la frase:

Teorema – *Una tautologia (cioè una formula ben formata che ha valore di verità 1 quali siano i valori di verità delle proposizioni componente) è deducibile.*

Ciò significa che, data una tautologia, esiste una catena finita di operazioni che, partendo dagli assiomi enunciati, permette di dedurre la formula che la esprime.

Questo teorema viene anche detto «teorema di completezza semantica» del calcolo delle proposizioni.

Nelle righe che precedono abbiamo più volte detto che le proposizioni (1), (2), (3) sono state scelte come proposizioni iniziali della nostra teoria logica. È possibile tuttavia scegliere altri sistemi di proposizioni per fondare una logica delle proposizioni non analizzate.

Ognuno di tali sistemi viene chiamato equivalente al precedente, nel senso che le sue proposizioni iniziali possono essere costruite con l'applicazione delle regole di deduzione da quelle che abbiamo enunciate, e viceversa.

§ 8. PREDICATI E QUANTIFICATORI

Abbiamo fin qui considerato una proposizione come un tutto unico, interessandoci soltanto al valore di verità che essa può avere. Possiamo fare ora un passo ulteriore prendendo in considerazione delle proposizioni che potremmo chiamare «aperte», del tipo della seguente:

(1) x è un cittadino milanese.

Ovviamente una successione di simboli del tipo della precedente non è una frase dotata di senso compiuto; essa tuttavia può diventare tale se al posto del simbolo indeterminato «x» viene posto il nome di un essere umano, che possa diventare il soggetto di una proposizione di cui «milanese», è il predicato.

In altri termini, si potrebbe dire che la frase (1) contiene una lacuna, che è simbolizzata dalla lettera indeterminata x; la frase viene ad avere un senso compiuto, e quindi un valore di verità, quando la lacuna sia colmata, ponendo al posto della indeterminata x il nome di un elemento dell'universo di discorso di cui si sta trattando.

Le stesse cose potrebbero essere presentate in forma lievemente diversa dicendo che la frase (1) attribuisce ad un soggetto umano x (per il momento non precisato) il predicato «cittadino milanese».

Generalizzando le considerazioni precedenti si potrebbero prendere in esame anche delle frasi con due o anche con tre lacune: per esempio, parlando di esseri umani, si può pensare alla frase:

(2) $\qquad$ x è padre di y

e parlando di geometria e di punti su di una retta, si può pensare alla frase:

(2 bis) $\qquad$ x sta fra i punti y e z,

che coinvolge tre punti.

È possibile quindi pensare a certe proposizioni aperte, aventi cioè una o anche più lacune: tali proposizioni vengono simbolizzate con notazioni convenzionali del tipo

(3) $\qquad$ P (x), P (x,y), P (x,y,z) ecc.

simboli di cui si dice che esprimono dei «predicati monoargomentali», oppure «biargomentali, triargomentali ecc».

In generale si potrebbe dire che frasi aperte di questo tipo possono diventare delle proposizioni dotate di un determinato valore di verità quando al posto delle lacune vengano posti i nomi di elementi appartenenti a determinati insiemi, che formano l'universo del discorso.

Tuttavia possiamo osservare che il sostituire il nome dell'elemento di un determinato insieme non è la sola maniera per poter ottenere una proposizione dotata di valore di verità da una forma proposizionale aperta.

Si consideri per esempio, nel caso in cui l'universo del discorso sia quello degli esseri umani esistenti oggi sulla terra, la frase che corrisponde al predicato «biondo»:

x è biondo

che potrebbe essere simbolizzato per esempio con la scrittura

B (x).

È chiaro che la frase diventa vera o falsa a seconda che al posto della indeterminata x sia sostituito il nome di un essere umano che è di fatto biondo o non lo è. Ma si può anche considerare la frase che si ottiene dicendo: Tutti gli uomini sono biondi.

Questa frase viene abitualmente simbolizzata scrivendo

(4) $\qquad \forall$ x B (x)

che si legge «per tutti gli x è vero B (x)».

Il simbolo «$\forall$ x» che precede il simbolo di predicato B (x) viene chiamato «quantificatore universale». In altro modo si potrebbe pensare di ottenere una frase dotata di valore di verità, dalla frase che presenta il predicato «biondo», scrivendo che esistono degli uomini che sono biondi; tale frase viene abitualmente scritta con il simbolo

(5) $\qquad \exists$ x b (x)

che si legge «esistono degli x tali che B (x) è vera». Il simbolo «$\exists$x» viene chiamato anche «quantificazione esistenziale»; esso potrebbe essere definito in base al quantificatore universale introdotto prima, perchè si ottiene subito che la frase (5) equivale alle

$\neg \forall$ x [$\neg$ B (x)].

§ 9. COMPATIBILITÀ E DECIDIBILITÀ

Abbiamo dato nei capitoli precedenti qualche idea sulla impostazione assiomatica di una teoria. Abbiamo osservato ripetutamente che la scelta delle proposizioni primitive che stanno alla base di una teoria non è necessariamente obbligata dall'oggetto della teoria stessa: può essere considerata un atto di imperio del trattatista, il quale sceglie il sistema di proposizioni primitive che lo soddisfa meglio.

Rimane tuttavia una condizione fondamentale a cui ogni teoria deve ubbidire, per poter essere considerata come un apporto positivo alla scienza: invero il sistema di proposizioni primitive che viene enunciato non deve contenere in sè alcuna contraddizione nascosta.

Notiamo infatti che, anche in base a ciò che è stato esposto sopra (cfr. la tantologia (6) del § 6), se esistesse una contraddizione nelle premesse di una teoria, allora da queste premesse potrebbe essere dedotta una proposizione qualesivoglia, ivi compresa anche la negazione delle premesse, secondo quanto affermato dalla sentenza «ex falso sequitur quodlibet».

Pertanto il problema di garantire che un insieme di proposizioni primitive sia esente da contraddizioni interne (sia «*compatibile*», come si dice abitualmente) potrebbe essere risolto esibendo anche una sola proposizione che non può essere dedotta dalle proposizioni stesse.

Non intendiamo qui addentrarci in questa discussione, perchè richiederebbe degli sviluppi che escono dai nostri scopi attuali. Vogliamo soltanto ricordare che questa problematica è nata dalle ricerche sui fondamenti della matematica, in particolare della geometria e della aritmetica elementare.

Nel caso della geometria essa è il risultato di una lunga successione di analisi, durate secoli, a proposito del significato della geometria e sul fondamento di questa scienza. Gli studi riguardanti il cosiddetto postulato della parallela e la creazione delle geometrie che vengono abitualmente chiamate «non euclidee» hanno condotto alla enunciazione di vari sistemi di proposizioni primitive atte a costruire una dottrina da potersi chiamare «geometria»; in questi casi la constatazione della compatibilità di un sistema di proposizioni primitive viene data abitualmente dai matematici esibendo dei «modelli», cioè dei sistemi di enti, tratti dalla esperienza concreta oppure da altri capitoli della matematica, che soddisfano alle proposizioni primitive.

Alla base di una constatazione di questo tipo, che non è una dimostrazione logica, ma semplicemente la esibizione di determinati fatti, sta forse un postulato di coerenza del reale, che noi accettiamo come non contraddittorio nella misura in cui ne constatiamo la esistenza.

Più grave diventa il problema quando si tratti di una dottrina che coinvolge problemi molto più radicali di quelli studiati dalla geometria: per esempio quando si tratti dei principi della aritmetica oppure addirittura della logica formale stessa, che dovrebbe garantire ogni tipo di ragionamento, compresi anche quelli che noi facciamo sulla logica stessa.

Per esempio, l'analisi dei postulati di Peano, presentati nel cap. 5, e dei postulati che possono essere sostituiti a questi per una costruzione rigorosa dell'aritmetica, porta a concludere che la loro enunciazione richiede degli strumenti logici che sono ad un livello superiore a quello a cui si mantiene il calcolo delle proposizioni non analizzate di cui abbiamo trattato finora.

Invero, nella enunciazione dei postulati di Peano, è necessario poter dire che un certo elemento di un determinato insieme ha una certa proprietà, cioè è necessario poter attribuire un determinato predicato (che esprime la proprietà) ad un certo soggetto; inoltre, nel postulato 5, è necessario poter esprimere che una certa proprietà vale *quale che sia* la classe S che si considera.

Queste questioni, cui abbiamo sommariamente accennato, ed altre su cui non possiamo soffermarci, hanno condotto a studi profondi ed importanti di logica. Una questione che si presenta come particolarmente importante è quella che viene indicata come il *problema della decidibilità* di una certa proposizione in un certo sistema formale.

In questo ordine di idee hanno avuto importanza storica i risultati di K. Gödel, il quale ha mostrato come si possano costruire, in un linguaggio formalizzato che permetta di esprimere l'aritmetica elementare, delle frasi che vengono chiamate «indecidibili».

Precisamente una frase di un sistema formale viene detta «*indecidibile* (per il sistema formale stesso) se nell'interno del sistema non è possibile costruire la dimostrazione nè della frase nè della negazione della frase stessa.

Gödel dimostrò in particolare che è indecidibile la frase che afferma la consistenza del sistema formale stesso.

In forma approssimata, si potrebbe dire che con questo risultato si garantisce la impossibilità di accertare la consistenza di un sistema formale, abbastanza potente da poter formalizzare l'aritmetica elementare, rimanendo nell'interno del sistema stesso.

Non possiamo qui soffermarci a mettere in evidenza tutta l'importanza di questo risultato. Una delle interpretazioni che se ne potrebbero dare condurrebbe ad osservare che, anche in una scienza che ci si presenta talvolta come molto astratta, il ricorso alla osservazione di una realtà esterna ed ai dati di quella che viene chiamata «intuizione» appare spesso come indispensabile.

§ 10. LA LOGICA NELLA SCUOLA

Concludiamo questo brevissimo cenno alle prospettive che si presentano nello studio della logica, osservando che, ai fini didattici, si deve evitare che si ripeta un fenomeno analogo a quello occorso per la deprecata insiemistica e cioè che si diffonda l'idea di dover insegnare agli allievi della scuola dell'obbligo la logica simbolica.

Invece noi pensiamo che, proprio nel periodo in cui il giovane incomincia a far oggetto di studio gli strumenti con cui si esprime (imparando la morfologia e la grammatica della propria lingua) egli possa utilmente essere richiamato a meditare anche sul significato logico degli strumenti espressivi che egli adopera.

A nostro parere, non si tratta di «insegnare a ragionare»; paradossalmente si potrebbe dire che se uno non ragiona non impara mai a ragionare. Si tratta invece di prendere coscienza, di chiarire a se stessi i procedimenti deduttivi, di rendersi conto in modo esplicito e cosciente delle operazioni mentali che di solito si eseguono in modo quasi spontaneo senza pensarci; e ciò prendendo l'occasione dell'impiego del linguaggio comune.

Per un insegnamento che abbia questi fini, un quadro concettuale sufficientemente rigoroso e didatticamente corretto può essere già fornito, in modo scientificamente soddisfacente, dal calcolo delle proposizioni non analizzate, di cui si è discusso dei §§ 5 e 6.

Terminiamo osservando come si possa ritrovare in queste problematiche di pensiero un punto di contatto di grande interesse tra l'insegnamento della lingua e quello delle materie scientifiche, in particolare della matematica; punto di contatto che dovrebbe dar luogo ad un proficuo lavoro interdisciplinare; lavoro che — rispettando le competenze di ogni insegnante — miri tuttavia ad una formazione globale completa del soggetto.

PARTE SECONDA

La ricerca didattica

1 PROGETTO DI FORMAZIONE MATEMATICA

CARLO FELICE MANARA

§ 1. L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

L'incontro del giovane in età infantile, poi preadolescenziale e adolescenziale, con la matematica può essere analizzato da vari punti di vista. Noi fisseremo la nostra attenzione anzitutto sui contenuti, poi sul valore formativo che può essere conseguito con l'insegnamento di questi, infine sulle procedure e sulle strategie didattiche con le quali tali scopi possono essere conseguiti. Ovviamente l'ordine con cui abbiamo elencato questi punti di vista non indica una gerarchia di importanza, ma solo l'ordine logico con cui sono stati presi in esame.

Per quanto riguarda anzitutto i contenuti, essi potrebbero essere elencati facendo riferimento ai programmi; per gli scopi che ci interessano qui, vorremmo elencarli classificandoli in tre gruppi fondamentali:

i) Le conoscenze che riguardano i numeri naturali;
ii) le conoscenze che riguardano le grandezze;
iii) le conoscenze che riguardano la prima sistemazione razionale della realtà esterna mediante la geometria.

i) *I numeri naturali*

Su questo argomento l'insegnamento, nelle varie fasce di età considerate, dovrebbe condurre anzitutto alla conoscenza ed alla utilizzazione spedita e sicura della numerazione, parlata e scritta, poi, via via, all'impiego delle convenzioni di rappresentazione degli interi naturali, alla lettura delle abituali scritture convenzionali, e infine alla esecuzione delle operazioni sui numeri naturali, con le procedure abituali.

ii) *La teoria elementare delle grandezze*

Su questo argomento l'insegnamento dovrebbe portare alla conoscenza ed alla utilizzazione dei concetti pratici riguardanti le grandezze, ed agli strumenti utilizzabili per la loro rappresentazione. Tali strumenti potrebbero essere sbrigativamente identificati con i numeri razionali, nei due principali momenti della loro rappresentazione sotto la forma di «frazione» e con la utilizzazione della rappresentazione decimale.

Tra gli argomenti strettamente collegati con questi, ricordiamo la teoria della proporzionalità tra classi di grandezze, e l'impiego delle ordinarie convenzioni che contemplano la manovra sicura delle unità di misura internazionali.

iii) *La geometria* intesa come primo capitolo della fisica, cioè come primo capitolo della conoscenza razionale della realtà esteriore.

In questo ambito la geometria pone il discente di fronte ai problemi riguardanti l'analisi delle nostre percezioni della realtà materiale, l'impiego di un opportuno vocabolario tecnico, la deduzione rigorosa.

Si potrebbe aggiungere che l'insegnamento di questi contenuti mira ad un duplice scopo: anzitutto conferire alcune conoscenze elementari, necessarie per la vita associata delle società moderne; in secondo luogo conferire la formazione mentale e culturale necessaria per la impostazione razionale delle nostre conoscenze e dei nostri comportamenti nei riguardi delle cose che ci circondano.

Vorremmo osservare che gli scopi sopra elencati non sono comparabili tra loro e che non è possibile, in particolare, trascurare il secondo, con il pretesto che soltanto il primo (che mira al conferimento di conoscenze pratiche giudicate «utili») è strettamente necessario. Infatti — a nostro parere — un insegnamento che miri alla formazione scientifica (in senso lato) del discente, oltre ad avere un valore umano molto maggiore di quello mirante al puro addestramento tecnico, risulta anche, a conti fatti, meno gravoso per gli insegnati, purchè, beninteso, questi cerchino la formazione prima della informazione pura e del semplice addestramento.

§ 2. LA PROGETTAZIONE DI UN CURRICOLO

In presenza della necessità pratica sociale di conferire certe conoscenze, il problema dell'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo, e quindi della costruzione di un corrispondente curricolo, appare esteriormente abbastanza precisato e definito dal punto di vista dei contenuti: tuttavia esso si collega con il problema di conferire una formazione mentale scientifica. Invero questa può essere fatta in relazione a dei contenuti qualsivogliano, purchè questi vengano insegnati con un determinato spirito e secondo una determinata strategia didattica, che è ispirata dagli scopi ultimi della formazione piuttosto che dai contenuti materiali delle conoscenze che si vogliono conferire.

Pertanto pare a noi che l'aspetto essenziale del curricolo non stia tanto nei contenuti, i quali — come si è detto — sono determinati dalle necessità sociali e dalle abitudini culturali del nostro paese; necessità ed abitudini che sono tradotte dai programmi ministeriali, insieme con certi atteggiamenti dei consiglieri del Potere politico. Ma il momento essenziale dell'insegnamento sta piuttosto nella formazione mentale e spirituale che si può costruire con l'occasione di tali contenuti.

Dato per scontato l'insieme di questi fini formativi, pensiamo che le strategie occorrenti possano essere dettate dalla evoluzione intellettuale che avviene nella fascia di età che stiamo considerando.

Pare a noi che si possa dire — in forma generica — che lo scopo dell'insegnamento delle scienze (in generale e della matematica in particolare) possa essere, sommariamente e sbrigativamente, descritto dicendo che si mira a conferire una prima e fondamentale «*alfabetizzazione scientifica*». E con questa espressione si potrebbe intendere che si mira a far acquisire un insieme di abitudini alla osservazione, alla schematizzazione ed all'impiego di concetti precisi, i quali verranno poi espressi con parole tecniche o addirittura con simboli convenzionali.

In questo ordine di idee vorremmo prendere in considerazione l'aspetto della matematica come linguaggio; linguaggio che richiede una concettualizzazione precisa ed un rispetto rigoroso delle regole sintattiche.

In queste due esigenze pare a noi che si possa situare la difficoltà dell'insegnamento della matematica, ma anche l'insieme dei vantaggi culturali conseguibili con questo. Beninteso esso non deve essere concepito come un puro addestramento all'impiego di certi simboli, retti da strutture sintattiche imposte dal di fuori, ma deve diventare una conquista vitale del discente.

Queste elementari considerazioni possono ispirare una strategia didattica, la quale tuttavia ammette diverse realizzazioni concrete; la loro scelta può dipendere in larga misura dalla formazione culturale dell'insegnante, dai gusti di questi, dalle reazioni dei discenti, ed anche da altre circostanze che possono motivare e giustificare la adozione di una linea didattica che abbia i caratteri della originalità e della vitalità.

A questi criteri si sono ispirati i lavori che presentiamo; lavori in cui la originalità dei gruppi si manifesta nella scelta delle strategie, le quali sono tuttavia ispirate tutte da una comune concezione del lavoro dell'insegnante.

A nostro avviso, uno degli aspetti che costituiscono il pregio dei lavori che presentiamo consiste proprio nella grande libertà di svolgimento che è stata data ai singoli gruppi di lavoro. Libertà che si è esplicata nella scelta consapevole e meditata della linea di sviluppo di un argomento che pure è stato oggetto di libera scelta preliminare, e nella spontaneità dello svolgimento dell'argomento liberamente scelto. Questi punti di partenza hanno condotto ad una vitale diversità di strategie, di modo che un lettore attento e personalmente impegnato può trovare, nella diversità delle realizzazioni, le idee e le esperienze che più si confanno alla sua opera personalmente strutturata secondo le idee autonomamente acquisite ed adottate.

Ribadiamo quindi che non è nostra intenzione proporre un curricolo unico, e presentare dogmaticamente dall'alto agli insegnanti una strategia didattica preconfezionata. Non siamo infatti convinti che il lavoro didattico possa essere svolto a tavolino, o definito nei suoi minimi particolari nelle assise dei pedagogisti teorici; pensiamo invece che tale lavoro debba essere frutto della collaborazione feconda tra coloro i quali, per vocazione e per professione, coltivano la scienza pura, e coloro i quali praticano l'insegnamento nella quotidiana e spesso grave fatica nella scuola.

§ 3. DAL CONCRETO ALL'ASTRATTO

Se si concepisce l'insegnamento della matematica nel senso che abbiamo esposto, si ha modo di accertare che esistono molti punti di contatto con l'insegnamento delle altre materie; punti di contatto che potrebbero permettere un interessante lavoro interdisciplinare all'insegnante accorto. Inoltre si possono anche intravvedere gli elementi specifici che distinguono la matematica dalle altre materie e rendono il suo insegnamento particolarmente utile, se non addirittura necessario, ai fini di quella alfabetizzazione scientifica di cui si diceva.

Tra i punti di contatto che ci pare di poter intravvedere vi è l'aspetto di linguaggio che abbiamo già toccato. In questo ordine di idee l'insegnamento della matematica dovrebbe — pensiamo — essere impartito sulle stesse linee, se non ovviamente con le stesse modalità, di quello della lingua materna e delle altre lingue.

In particolare vorremmo ricordare certe mode che hanno infierito recentemente nella didattica della matematica, mode secondo le quali si voleva che l'insegnamento partisse col propinare al discente un insieme di strutture generalissime ed altrettanto astratte, con il pretesto che queste strutture contemplano dei concetti estremamente semplici. Si pretendeva cioè che la semplicità e la generalità dei concetti trattati (come per esempio quello di «insieme», spesso presentato con risibili pseudodefinizioni) potesse accompagnarsi alla facilità di apprendimento. Ma si dimenticava così il fatto innegabile che la nostra mente procede dal concreto all'astratto nella costruzione dei concetti; e che quindi la presunta semplicità dei concetti generalissimi non si accompagnava per nulla alla facilità di apprendimento, come sbrigativamente era stato presunto. Di conseguenza le strutture formali generalissime venivano apprese soltanto come una imposizione esteriore non motivata dai bisogni interni di espressione degli alunni; e venivano dimenticate o lasciate inoperanti, perchè troppo distanti dalla vita.

Al contrario, come del resto è richiesto dal buon senso e dalla esperienza da questi dettata, contro le novità teorizzanti e velleitarie di certa pedagogia astratta, noi riteniamo che uno dei momenti caratterizzanti di una ragionevole pedagogia della matematica sia la procedura che va DAL CONCRETO ALL'ASTRATTO, o meglio *la procedura che non prenda mai l'astratto come punto di partenza.*

Tale procedura dovrebbe costituire una regola generale, quali che siano i precetti di qualche teorico velleitario; ed essa può essere adottata in presenza di ognuno dei contenuti che abbiamo ricordato sopra e che formano l'oggetto dell'insegnamento della matematica.

Vorremmo insistere su queste idee, per evitare anche che si cada nell'errore opposto a quello che ha retto fino ai nostri giorni l'insegnamento, secondo le mode di cui si diceva. In particolare quindi vorremmo che si abbandonasse la astrazione eccessiva, propinata dall'alto e non motivata, ma soltanto quando essa è punto di partenza dell'insegnamento. Al contrario continuiamo a pensare che questo debba avere come scopo e come punto di arrivo la costruzione di un sistema di concetti astratti. Pertanto non vorremmo che l'insegnamento della matematica, quasi per una reazione alle mode imperanti fino a qualche tempo fa, diventasse un puro addestramento alla manovra di simboli o — peggio ancora — alla manovra di piccole o grandi macchine «pensanti».

Insistiamo quindi sul fatto che — a nostro parere — l'insegnamento della matematica deve mirare alla formazione dell'uomo ragionevole che sa motivare ogni propria conoscenza e dirigere intelligentemente ogni propria scelta ed ogni operazione materiale. Di conseguenza il solo addestramento pratico, all'impiego di formule o all'uso di apparati, non può sostituire l'opera di formazione, che è lo scopo principale dell'insegnamento della matematica.

§ 4. DALLA INTUIZIONE ALLA ESPRESSIONE

Un secondo momento fondamentale dell'opera di insegnamento dovrebbe consistere — a nostro parere — nella formazione all'impiego di certi mezzi espressivi; nel caso della matematica, all'impiego delle convenzioni di rappresentazione dei numeri e delle grandezze, o all'impiego del linguaggio tecnico specializzato della geometria per la descrizione delle prime esperienze riguardanti la propria posizione e la manipolazione dei corpi rigidi.

Pertanto noi riteniamo che in questo secondo momento l'opera dell'insegnamento possa essere caratterizzata dal fatto che si tende a portare il discente DALLA INTUIZIONE ALLA ESPRESSIONE.

Per esempio, la posizione del soggetto nello spazio, rispetto agli oggetti che lo circondano, può essere descritta, insieme con gli oggetti stessi, con termini precisi ed adeguati; le operazioni intuitive sugli insiemi finiti e concreti debbono diventare delle operazioni simbolizzate con le convenzioni della rappresentazione dei numeri; le operazioni sulle grandezze debbono diventare operazioni sulle loro misure, che le rappresentano completamente, ai fini che in questo momento ci interessano.

Sarà inutile osservare che questo momento è analogo (anche se non perfettamente coincidente) al momento in cui, nell'insegnamento di una lingua, si passa dalla concettualizzazione interiore alla espressione esteriore dei concetti costruiti, impiegando i mezzi espressivi della lingua stessa e rispettandone le regole, insieme ovviamente con quelle della logica.

Il fatto che i mezzi espressivi della matematica debbano soddisfare delle regole particolarmente strette non muta la natura della maturazione del discente; d'altra parte non si può negare che questo fatto costituisca una difficoltà particolare per gli alunni, ma anche abbia un particolare valore formativo.

Vorremmo infatti osservare che, nella nostra epoca che viene strombazzata come quella della «civiltà dell'immagine», diventi sempre meno gradito lo sforzo per la formulazione precisa delle proprie idee, e per la loro esposizione breve e concisa. L'abitudine dilagante del vaniloquio senza scopo preciso, della mozione degli affetti, dell'impiego ingiustificato di parole straniere, della sgrammaticatura metodica, degli strappi troppo frequenti alla sintassi, tutti i maltrattamenti insomma che sono troppo spesso inflitti alla nostra lingua, alla logica ed al buon senso, l'abitudine all'impiego di espressioni inutilmente e pomposamente tronfie per dire cose banali e addiritture per non dire nulla, rendono perticolarmente urgente un'opera didattica che miri ad insegnare la concisione, la precisione, il rigore deduttivo. E noi pensiamo che l'insegnamento della matematica abbia un suo preciso valore culturale anche in questo ordine di idee.

Ripetiamo ancora che questa educazione alla espressione precisa e concisa ed alla deduzione rigorosa può essere cercata in corrispondenza a ciascuno dei contenuti in cui si articola il curricolo. Con ciò vorremmo dire che questa educazione dovrebbe costituire la ricerca di un «habitus» mentale piuttosto che di una formazione tecnica specifica e legata ad un insieme di conoscenze particolari.

§ 5. DALLA CREATIVITÀ ALLA RAZIONALITÀ

L'intelligenza spesso viene impiegata per la ricerca delle risposte a determinati problemi e quindi per dirigere il comportamento razionale in determinate situazioni in cui il soggetto viene a trovarsi.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che spesso l'uomo si trova in situazione analoga a quella dell'animale; ma vorremmo anche aggiungere che il carattere distintivo della azione umana dovrebbe consistere proprio nella capacità di programmare razionalmente le proprie azioni, proprio perchè ha ottenuto razionalmente una risposta alle proprie domande.

A questo proposito ci viene alla mente la polemica che opponeva il filosofo e matematico Proclo (V secolo d.C.) agli Epicurei del suo tempo; costoro dichiaravano inutile e risibile la geometria, osservado che è inutile dimostrare che un lato di un triangolo ha lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri due, quando anche un somaro, se deve raggiungere un mucchio di fieno per nutrirsene, non percorre due lati di un triangolo, ma va direttamente al suo scopo. La risposta di Proclo fu che in ciò sta appunto la differenza tra il somaro e l'uomo: precisamente nel fatto che l'uomo non si limita a sapere che un lato è minore della somma degli altri due, ma sa anche il perchè, lo sa dimostrare, sa che le cose non possono essere altrimenti.

A questo appunto pensiamo che dovrebbe essere diretta l'azione dell'insegnamento della matematica; avviene infatti speso che la risposta ad un problema (pratico o teorico, geometrico o aritmetico che sia) viene data per una specie di illuminazione inventiva, per un atto di creatività che porta direttamente alla risposta o allo scopo ignorandone il perchè; ma lo scopo della formazione alla razionalità dovrebbe essere appunto quello di giustificare razionalmente il momento spontaneo, di utilizzare il ragionamento non per mortificare la creatività, ma per fondare su basi incrollabili i suoi risultati.

Pertanto noi pensiamo che non debba essere trascurata la *educazione al passaggio DALLA CREATIVITÀ ALLA RAZIONALITÀ*.

Vorremmo osservare che, in relazione a questo momento, come del resto in relazione agli altri di cui abbiamo detto, non si tratta di insegnare cose assolutamente nuove, nè di imporre delle procedure precostituite e predigerite; si tratta invece di insegnare l'abitudine ad analizzare i propri procedimenti interiori o le proprie azioni, in modo da metterne in evidenza esplicitamente i punti di partenza, le ipotesi, e da poterne controllare i singoli passaggi deduttivi.

Si potrebbe infatti dire che le ipotesi di un teorema contengono già il teorema stesso; che i dati di un problema ben posto contengono già le risposte. Ma queste sono contenute implicitamente nei dati, e il lavoro (spesso difficile) della risoluzione si potrebbe descrivere come quello che porta a rendere esplicite le risposte già contenute nei dati, sì che su queste informazioni, questa volta chiaramente e coscientemente possedute, possa concentrarsi l'attenzione degli interessati.

§ 6. IL CURRICOLO UNITARIO E PERSONALIZZATO

Accanto alle considerazioni sommarie che abbiamo esposto nelle pagine precedenti, vorremmo aggiungere che — in questo spirito — non soltanto i contenuti dell'insegnamento hanno una importanza relativa rispetto alla formazione a cui si mira, ma anche lo sviluppo diacronico dello svolgimento del programma stabilito deve essere visto con una certa libertà ed un certo distacco.

Non si può escludere, per esempio, che su qualche argomento, che è gia stato insegnato in periodi precedenti, si debba ritornare; che qualche capitolo del programma già svolto debba essere ripetuto, forse più di una volta. Il procedimento di apprendimento di concetti astratti, specialmente all'età di cui stiamo parlando, avviene con procedure che sono spesso misteriose, nonostante le pretese di certi psicologi e di certi ingenui pedagogisti. Spesso l'apprendimento avviene come per sbalzi, e con ritmo differente da un soggetto ad un altro e, presso un medesimo soggetto, da un momento all'altro dello sviluppo fisico e psichico. Pertanto non pensiamo che si debba pretendere un progresso nell'apprendimento che ricalchi pedissequamente lo svolgimento logico dei concetti, così come abbiamo cercato di presentarlo. L'insegnante deve poter essere libero di graduare la velocità del suo insegnamento, la complessità delle idee e le difficoltà degli algoritmi a seconda della risposta delle varie classi.

Queste considerazioni dovrebbero poter aiutare a superare le crisi del passaggio dalla scuola elementare alla media, tanto per gli alunni che per gli insegnanti. Spesso infatti gli insegnanti della Media avanzano critiche a proposito della preparazione conferita nella scuola elementare, e lamentano di dover ripetere dei capitoli del programma, capitoli che — secondo una ragionevole presunzione — dovrebbero essere ben noti. Ma spesso il nuovo ambiente, le nuove procedure, i nuovi interessi vitali ed una miriade di altre circostanze mutano il panorama interiore dei giovani in modo tale che le nozioni passate sembrano quasi completamente cadute nell'oblio più profondo.

Ma vale la pena di osservare che ciò può accadere a proposito delle varie tecniche di calcolo e di soluzione dei problemi, se tali tecniche sono state presentate ed insegnate a mo' di puro addestramento; ci pare invece più difficile che cada così completamente nell'oblio una formazione, un «habitus» mentale alla schematizzazione, alla formalizzazione (nella misura conveniente all'età, beninteso), alla deduzione rigorosa.

Se si volesse richiudere in poche parole l'assunto delle righe precedenti, vorremmo dire che se si fa della matematica una materia di cultura piuttosto che di addestramento o di contenuti, ben difficilmente il lavoro andrà perso, nonostante ogni apparenza in contrario.

Perchè noi pensiamo che l'addestramento si perda facilmente, ma la cultura più difficilmente, almeno nella misura in cui essa è diventata un patrimonio vivo del soggetto che se ne è appropriato.

Le considerazioni precedenti servono a spiegare, almeno in parte, lo spirito che ha ispirato il lavoro di tutti coloro i cui nomi compaiono in questo volume, ed anche danno ragione della presentazione dell'opera.

I gruppi hanno lavorato in modo abbastanza autonomo, e la presentazione del lavoro svolto ha voluto salvare il più possibile la originalità del lavoro stesso senza imporre una uniformità esteriore che sarebbe andata a scapito della originalità dei contributi. Il lettore avveduto si accorgerà delle differenze di impostazione del lavoro dei gruppi, anche in presenza di situazioni esteriormente simili. Ma questa diversità dovrebbe essere un aspetto qualificante della fisionomia del lavoro: non si è infatti voluto presentare un curricolo «modello», quasi per imporre una imitazione pedissequa, tanto meno valida quanto più imposta dal di fuori a persone che spesso hanno già una esperienza valida di lavoro didattico. La diversità delle esperienze, come la diversità delle procedure e dei risultati, offrono a chi lavora nella scuola (purchè con dedizione ed intelligenza) molti spunti di scelte culturali e di comportamento pratico, perchè ognuno possa scegliere la propria strada con convinzione e con pertecipazione.

2 ANALISI DELLA RICERCA: LA GEOMETRIA

CARLO FELICE MANARA

§ 1. PREMESSA

Nel capitolo 1 di questa parte seconda abbiamo esposto le idee fondamentali del criterio ispiratore del lavoro che presentiamo.

Tali idee sono state sinteticamente enunciate con i momenti:
dal concreto all'astratto
dalla intuizione alla espressione
dalla creatività alla razionalità.

Questi momenti si potranno trovare realizzati (come già si è detto nella PREMESSA) nei lavori di gruppo, sperimentali, che costituiscono la terza parte di questo volume.
Vale la pena di chiarire ancora una volta che il procedimento didattico non può ricalcare pedissequamente la scansione logica, e che pertanto ciò che abbiamo esposto finora deve essere considerato come una griglia di scansione cronologica di questi.

Precisamente i lavori dei gruppi A, B, (cfr. INTRODUZIONE della terza parte) trovano il loro punto di partenza da una situazione concreta, che è stata presentata come '*problema stimolo*' attorno alla quale si è articolato il lavoro degli insegnati lungo le linee programmatiche fondamentali di cui si diceva.

Ovviamente nella risoluzione del 'problema stimolo' si trovano realizzati tutti i momenti logici di cui sopra: per esempio l'atto di decodifica dell'enunciato costituisce un momento di realizzazione del passaggio dal concreto all'astratto. La schematizzazione in termini geometrici del problema stesso costituisce poi anche una realizzazione del momento del passaggio dalla intuizione alla espressione simbolica del problema; e notiamo qui che con il termine 'espressione simbolica' non intendiamo necessariamente indicare soltanto la scrittura di formule (o in generale di simboli grafici e linguistici) ma anche la traduzione del problema concreto con figure. La ricerca infine della strategia risolutiva costituisce un momento della realizzazione del passaggio dalla creatività spontanea alla razionalità.

Come si vedrà dalla analisi dei protocolli sulle reazioni delle scolaresche, dai commenti degli insegnanti e dalle discussioni dei gruppi, l'azione didattica che ne consegue può essere articolata in vari modi, sempre diretti agli stessi scopi.

Da parte nostra proporremo nel successivo cap. 4, una lettura critica dei risultati emersi in questo primo stadio della ricerca. Emerge, a nostro parere, l'esigenza di avere sempre presente, in tutte le strategie didattiche che si vengono elaborando, una dimensione che dovrebbe essere naturale, ma risulta invece spesso impalpabilmente sfuggevole. Vogliamo parlare della dimensione della *realtà* in cui deve svolgersi il nostro insegnamento, ma della realtà intesa non solo come *fatto oggettivo* (come il concreto da cui si risale poi all'astratto, nel senso detto al cap. 1) ma anche e acutamente come *fatto soggettivo* irrinunciabile per ogni allievo. Dobbiamo, in una parola, entrare nella realtà di ogni ragazzo.

Nella terza parte ampio spazio sarà dedicato alla presentazione e all'esame dei curricoli relativi ai numeri, alla geometria e alle grandezze. Questi tre temi, poi, sono visti tutti sotto l'angolatura unificante della struttura geometrica poichè riteniamo che la geometria, in questo momento dello sviluppo mentale dei soggetti, abbia un posto essenziale nella educazione matematica ed in generale nella educazione alla razionalità; essa infatti contempera le esigenze del rigore e della precisione di linguaggio con l'utilizzazione della fantasia, della immaginazione e della inventiva, sempre vive nei giovanissimi.

Nella stessa parte terza, infine, viene presentato un curricolo di logica, intesa quest'ultima nel senso precisato al cap. 7 della prima parte del volume, e in particolare nel § 10 di detto capitolo.

§ 2. IL RUOLO DELLA GEOMETRIA

Abbiamo detto nel cap. 1 § 1, che la geometria può riguardarsi come primo capitolo della conoscenza razionale della realtà esteriore. Questa conoscenza può svilupparsi a diversi livelli: da quella di carattere formativo generale a quello di addestramento ad abilità di uso e interesse operativo pratico. Ognuno di questi livelli può essere rintracciato tra gli obiettivi dei curricoli presentati dal gruppo B o C nella parte terza del volume.

In primo luogo possiamo riconoscere come la geometria si presti in modo egregio ad essere palestra per distaccare la nostra intuizione da una visione soggettiva del mondo. Si tratta cioè di abbandonare una percezione con cui siamo portati a descrivere il mondo in relazione a noi stessi, parlando di «alto e basso», «destra e sinistra», «avanti e dietro» etc. per arrivare invece a dare una descrizione degli oggetti e delle situazioni che mirino alla impostazione scientifica, valida per tutti, invariante rispetto ai punti di vista ed alle manipolazioni che noi eseguiamo sulle cose.

Va ovviamente precisato che non si vuole con questo affermare che l'insegnare al bambino l'uso corretto di termini come avanti-dietro, destra-sinistra, vicino-lontano (insegnamento che è esplicitamente previsto negli ultimi programmi didattici della scuola elementare) non costituisca una introduzione ad una descrizione *legittima* e *coerente* della realtà. Si vuole invece sottolineare che tale descrizione ha valore solo soggettivo e non è trasferibile o comunicabile ad altri e manca quindi di uno dei caratteri essenziali della conoscenza scientifica. L'introduzione all'uso corretto dei termini e dei concetti sopra richiamati, anche se importante e insopprimibile per il bambino del primo ciclo elementare, farà parte più della educazione linguistica o verbale, che della educazione matematica. In ogni caso *non* sarà opportuno chiamare *topologia* questo approccio primordiale del bambino alle sensazioni spaziali come invece si vede fare da alcuni testi scolastici. Ritorneremo sul significato scientifico di questo termine nel § 4 di questo capitolo.

Questa descrizione soggettiva e verbale della localizzazione spaziale di oggetti e persone è destinata ad evolversi per arrivare ai livelli di formalizzazione propri della matematica. Il livello di formalizzazione che si raggiunge nell'arco della scuola dell'obbligo consiste nella acquisizione del cosidetto «*metodo delle coordinate*»: tale metodo serve appunto per rappresentare entro lo spazio lineare, che schematizza il nostro spazio fisico sensibile, la posizione di punti o figure rappresentanti gli oggetti che ci interessa localizzare.

L'evoluzione dell'intuizione e del pensiero del bambino, che, partendo dalla localizzazione di oggetti riferiti a se stesso, giunge alla rappresentazione analitica di punti rispetto ad un assegnato sistema di riferimento, rappresenta uno dei momenti di crescita «dal concreto all'astratto» e «dalla intuizione alla espressione», di cui abbiamo più volte parlato.

Oltre all'allenamento alla visione razionale, scientifica ed obiettiva del mondo, la geometria offre poi anche una palestra unica per la deduzione rigorosa soprattutto quando non si faccia ricorso sistematico alla geometria analitica. In tale caso infatti, il lavoro di descrizione e di deduzione deve essere fatto con l'impiego del linguaggio comune e della logica abituale e ciò costituisce una occasione unica per esercitare la analisi linguistica e la logica elementare, per parlare di quantificazione, di negazione, di contraddizione, ecc.

Del resto vorremmo anche ricordare che questi erano gli strumenti di cui si servirono i geometri greci, in particolare gli strumenti di cui si serve Euclide nei primi libri dei suoi Elementi. E non si può negare che Euclide abbia fatto un bel lavoro, scrivendo il primo trattato scientifico (nel vero senso della parola) della Storia dell'umanità. Con che si dimostra anche che gli strumenti che veramente servono per il progresso non sono le macchine, o gli strumenti formali, ma lo spirito e l'intelligenza; beninteso, quando questa sia presente e lavori bene.

§ 3. IL PROBLEMA DELLA GEOMETRIA TRA PIANO E SPAZIO

Abbiamo detto che la geometria costituisce in certo modo la introduzione alla conoscenza scientifica del mondo, perchè potrebbe essere considerata come il primo capitolo della fisica. Ed in questo ordine di idee abbiamo anche messo in evidenza il valore formativo di questa materia di studio, osservando che essa allena alla schematizzazione, alla astrazione, alla formulazione precisa delle descrizioni degli oggetti, alla enunciazione precisa ed obiettiva delle proprietà di questi.

Dal punto di vista didattico sorge allora la questione se sia opportuno partire con la esposizione della geometria dello spazio (altrimenti detta «solida») oppure dalla geometria del piano.

La scelta della geometria solida come punto di partenza per la formazione geometrica ha avuto in passato dei sostenitori illustri: per esempio nel secolo XVIII le correnti innovative della scienza di allora sostennero che per lo studio della geometria era opportuno partire dai solidi; la osservazione che giustificava questa scelta didattica era quella, pertinente ma anche del tutto banale, che la esperienza concreta degli allievi si esercita primariamente su oggetti che hanno tre dimensioni. Pertanto la esposizione della geometria piana, prima di quella solida, costringeva gli alunni ad una operazione di astrazione che li portava lontano dalle esperienze concrete vissute.

Queste argomentazioni vennero ripetute da certe correnti didattiche del secolo scorso, e sono state accettate anche nei programmi proposti per la scuola elementare in Italia, programmi che enumerano figure solide e piane (è molto sostenibile che l'ordine della enumerazione voglia manifestare la preferenza per una determinata linea di condotta didattica da parte degli estensori dei programmi stessi).

Alle argomentazioni che sono esposte di solito si potrebbe anche aggiungere quella che porta ad osservare che proprio la linea didattica di cui si è parlato in tutto il presente lavoro, e che si propone di seguire il cammino che va dal concreto all'astratto, dovrebbe condurre alla scelta della esposizione della geometria dello spazio prima di quella del piano.

Va tuttavia osservato che la scelta della linea che va dal concreto all'astratto può anche essere conciliata con la esposizione della geometria piana prima della solida, perchè il cammino didattico potrebbe ragionevolmente partire da un concreto che non necessariamente debba essere il concreto solido materiale tridimensionale.

Si può infatti contrapporre alle argomentazioni portate a favore della primarietà della geometria solida, un insieme di osservazioni che sorgono dalla pratica didattica e dalla maggiore facilità di illustrare con figure gli oggetti della geometria piana, in contrasto con la difficoltà di costruire modelli solidi soddisfacenti per le figure anche elementari.

Pertanto, se si considera che il «concreto» che il bambino osserva in primo luogo per l'astrazione geometrica può anche essere il materiale didattico che egli trova già parzialmente elaborato nel testo che gli sta sotto gli occhi oppure che nasce dai disegni dell'insegnante durante la lezione, allora appare ragionevole che si possa anche partire dalle figure piane (più facilmente rappresentabili dall'insegnante e riproducibili dall'alunno) per la costruzione della geometria. In tal modo il «concreto» che dovrebbe essere il punto di partenza della astrazione scientifica si identificherebbe in gran parte con il materiale iconografico, presentato all'alunno o da lui riprodotto o costruito autonomamente.

È sulla base di considerazioni siffatte che i gruppi hanno concentrato la loro ricerca curricolare sulla geometria piana prima che su quella solida.

Per concludere dobbiamo però osservare che anche la geometria solida deve avere un suo posto, per esercitare la immaginazione dell'allievo e per stimolare la sua creatività. Inoltre, il fatto che gli oggetti della geometria dello spazio non siano facilmente rappresentabili come quelli della geometria piana, dovrebbe costituire un primo passo per l'avviamento di un'opera di interpretazione e di codificazione; opera che si compie sistematicamente con l'insegnamento della geometria descrittiva, ma che dovrebbe essere iniziata abbastanza presto, per evitare che la immaginazione spaziale venga intorpidita dal mancato esercizio e per allenare gli allievi alla decodificazione ed alla interpretazione delle rappresentazioni codificate, con figure o con altri mezzi.

Le difficoltà che molti (anche adulti) incontrano nella lettura delle carte geografiche e topografiche dimostrano che esercizi di rappresentazione degli oggetti dello spazio e di interpretazione delle rappresentazioni stesse sono molto utili, anche in campi diversi dalla geometria. Ed il fatto che le figure dello spazio non siano rappresentabili fedelmente sul piano se non con opportune convenzioni, che devono essere rigorosamente rispettate e correttamente interpretate, costituisce pure una occasione per la formazione scientifica in senso lato.

§ 4. LA «TOPOLOGIA» NELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO

Il termine «topologia» viene impiegato oggi in vari contesti e quindi anche con vari significati, non sempre molto vicini tra loro; pensiamo quindi che valga la pena di presentare qui qualche osservazione in proposito.

La topologia, come branca della matematica, ed in particolare della geometria, cioè della scienza che studia gli oggetti dello spazio (opportunamente idealizzati) e le nostre relazioni con essi, era stata chiamata anche «analysis situs» dai matematici che la trattarono in origine. Abbiamo riportato la espressione latina, perchè pensiamo che essa sia illuminante per comprendere — almeno in parte — le idee direttive fondamentali di questa branca della matematica. Infatti, in origine, essa si occupava dello studio delle proprietà delle figure che sono — per così dire — più elementari e fondamentali rispetto a quelle studiate dalla geometria tradizionale: per esempio il fatto che una figura abbia due o tre dimensioni, a prescindere dalla sua forma e dalla sua grandezza; il fatto che una curva sia aperta (cioè abbia due estremità) oppure sia chiusa su se stessa, che sia semplice oppure intrecciata. Un esempio tipico di proprietà delle figure che questa branca della geometria può studiare è dato dal celebre teorema di Eulero riguardante il numero F delle faccie, il numero S degli spigoli, il numero V dei vertici di un poliedro qualunque dello spazio che sia convesso, tale cioè che il piano che contiene una faccia lasci tutti i punti del poliedro da una sola parte.

Eulero ha dimostrato che, quale che sia il poliedro che soddisfa alla ipotesi di convessità, si ha sempre: $V + F = S + 2$.

Orbene, si immagina facilmente che questa proprietà non è valida soltanto per le figure a faccie piane: per esempio se immaginiamo il poliedro costruito con gomma, possiamo pensare di gonfiare la figura stessa, fino a portarla ad avere la forma sferica; se durante il gonfiamento seguiamo il destino delle faccie, degli spigoli e dei vertici, troviamo che la relazione numerica sopra scritta è ancora valida, come avviene per esempio per i palloni del gioco del calcio, che siano stati costruiti cucendo insieme varie «pezze».

Oggi la topologia ha assunto uno sviluppo imponente e non fa più ricorso a delle operazionii elementari immaginate, del tipo di quelle che abbiamo raccontato poco sopra. Resta tuttavia vero, come abbiamo già notato, che quando si cerca di educare il bambino ad osservare l'ambiente nel quale si svolge la sua vita, ed a descrivere questo ambiente con il linguaggio comune, tale descrzizione viene fatta impiegando dei vocaboli come «destra», «sinistra», «alto», «basso», «sopra», «sotto» che sono atti a precisare la situazione del soggetto rispetto ad altri oggetti che lo circondano o (come si suol dire con espressione abbreviata, ma non sempre corretta) rispetto «allo spazio».

Quindi, a rigore di termini, le parole sopra ricordate fanno parte di una «analysis situs», cioè di una analisi della sistuazione del soggetto rispetto all'ambiente in cui si trova. Pertanto l'impiego di tali termini (e degli altri analoghi) non è illegittimo; anzi esso può diventare addirittura necessario per intendersi con altri interlocutori.

Tuttavia pensiamo che sia da evitare l'uso (che sta diffondendosi) di chiamare «topologia» questa analisi della situazione del soggetto; e ciò per due ragioni che ci sembrano valide: anzitutto il termine ha un significato ben più preciso e tecnico nella matematica, e il dare il nome di «topologia» a queste nozioni elementari di linguaggio comune potrebbe ingenerare equivoci non sempre lievi. In secondo luogo riteniamo che un momento fondamentale della educazione del giovane alla razionalità sia il cercare di portarlo ad una descrizione e ad una analisi delle cose che abbiamo un significato oggettivo, valido per tutti gli osservatori e non soltanto per un osservatore determinato e privilegiato. Ci sembra che sia questa la strada che si dovrebbe percorrere per condurre il giovane alla visione scientifica del mondo; questa è appunto la strada percorsa dalla scienza fisico-matematica della realtà, e che è percorsa anche dalla topologia (nel senso tecnico del termine), Pensiamo quindi che sia bene evitare l'impiego del termine tecnico per indicare l'insegnamento di nozioni che, pur essendo utili, sono peraltro molto banali e comunque hanno un significato strettamente soggettivo.

È sulla base di queste osservazioni che, in ognuno dei curricoli presentati dai gruppi di ricerca, abbiamo voluto evitare l'uso del termine «topologia» per indicare le più elementari attività di orientamento spaziale, che cominciano ad operarsi fino dal primo ciclo della scuola primaria. Speriamo in questo modo di dare un contributo alla chiarezza e alla comprensione, anche lessicale, tra operatori scolastici dei più diversi livelli, chiamati però ad insegnare, ognuno con le modalità proprie, la stessa disciplina matematica.

3 ANALISI DELLA RICERCA: LA MISURA

CARLO FELICE MANARA - MARIO MARCHI

§ 1. IL PROBLEMA DELLA MISURA

L'attività di *misurare* rappresenta, in modo esemplare, uno dei punti di contatto tra la matematica e varie altre materie di insegnamento, di cui si è parlato al § 3 del cap. 1.

Infatti, già sulla base di una analisi superficiale, possiamo osservare che la misura fa, da una parte, certamente riferimento alla matematica, in forza del fatto che si esprime in linguaggio matematico (formalizzazione numerica); dall'altra parte, poi, si possono trovare tutte le diverse discipline nel cui ambito si collocano gli oggetti da misurare. Se si raffina poi questa analisi, si può notare che, collegato a questa attività di misurare, vi è un terzo aspetto, del tutto originale e interdisciplinare, che è quello della *comunicazione*: si misura, infatti, al fine di trasportare informazioni su una determinata grandezza, informazioni che possono poi essere utilizzate nei contesti più svariati: tecnici o scientifici, sociali, commerciali etc.

Questi tre aspetti che si possono riconoscere all'attività del misurare corrispondono anche ad altrettanti momenti di quel processo di matematizzazione della realtà, di cui si è più volte parlato.

Il fatto che la misura permetta di rappresentare, individuare in modo soddisfacente (almeno ai fini che ci si propone), mediante numeri, un certo aspetto della realtà sensibile, corrisponde a quel momento di *codificazione* della realtà stessa mediante lo strumento matematico, che è la conclusione a cui perviene il processo di formalizzazione di cui si è parlato nel § 2 del cap. 3 della prima parte.

A questo proposito vogliamo fare una sola osservazione, ma fondamentale. La codificazione matematica, in termini numerici, della operazione di misura, ha senso, cioè porta a effettive informazioni concretamente significative e utilizzabili, solo sulla base di quel *postulato di coerenza* tra realtà sensibile e struttura logica della matematica, di cui si è parlato più volte.

Infatti il rappresentare in determinati contesti certi oggetti della realtà sensibile con numeri (quelli che chiamiamo «le loro misure», in un qualche significato opportunamente precisato) ha senso solamente qualora certe operazioni formali che si possono compiere su questi numeri corrispondono (in maniera *isomorfa*, direbbero i matematici...) a determinate manipolazioni (concrete o ideali, poco importa) che possono essere operate sulle realtà misurate. Per esemplificare: può avere senso misurare segmenti con numeri interi assoluti (numeri naturali) perchè e soltanto perchè al segmento ottenuto dalla giustapposizione di altri due corrisponde come misura il numero che è la somma delle misure dei due segmenti giustapposti. Nel caso della misura di grandezze geometriche, il parallelismo tra proprietà delle grandezze e proprietà dei numeri che le rappresentano è bene illustrato nel cap 6, parte I.

§ 2. LA NOZIONE DI GRANDEZZA

Particolarmente delicata e articolata è l'analisi della *attività di misurazione* per quanto attiene agli oggetti da misurare. Qui infatti si può seguire tutto il processo già analizzato nei cap. 2 e 3 della prima parte e ripreso poi nel cap. 1 di questa seconda parte.

Il punto di partenza è costituito, come sempre, da un insieme di esperienze sensibili tra cui la nostra mente sente la necessità di fare ordine. Di fronte alla molteplicità degli oggetti che ci circondano, e in contrapposizione quasi alla identità originale di ognuno di essi, la nostra mente cerca elementi comuni individuabili in ciascuno, elementi che permettano di distinguere o identificare questi oggetti; secondo criteri dettati dalle più svariate esigenze. Si vengono così formando delle *schematizzazioni* nella valutazione delle nostre esperienze sensibili, che noi razionalizziamo sotto l'etichetta di *concetti* o *categorie mentali*. Non è compito del matematico rintracciare nella storia del pensiero umano il perchè si siano formate determinate categorie concettuali piuttosto che altre. Rimane il fatto che noi ci troviamo in eredità concetti come quello di *forma* (geometrica) di un'oggetto, *dimensione* (larghezza, lunghezza, altezza), *distanza* etc.

Il compito della matematica comincia quando di alcuni di questi concetti si vuole dare una *definizione rigorosa*, cioè una definizione che abbia valore intersoggettivo (sia cioè comunicabile e comprensibile) ed esaustivo, cioè non rimandi ad altre nozioni a loro volta imprecisate o imprecisabili. Sappiamo come la matematica assolve a questo compito (cfr. ancora il cap. 3 della parte prima del volume): si individuano delle proprietà di comportamento che si vogliono essere caratterizzanti degli enti da definire, e si assegna una definizione implicita di tali enti attraverso l'elencazione di queste proprietà. Le proprietà di cui parliamo sono dette costituire un *sistema di assiomi* e l'insieme di proposizioni, di termini primitivi e di relazioni fondamentali di cui tale sistema è composto, costituiscono quel traguardo di *formalizzazione* che è meta continua della evoluzione del pensiero matematico.

Nel cap. 6 della prima parte del volume è riportato un possibile sistema di assiomi che definisce implicitamente la nozione di *classe di grandezze omogenee*. Tale sistema di assiomi è basato essenzialmente su due linee di fondo: la possibilità di *confrontare* tra loro due grandezze e la capacità di costruire una terza grandezza a partire da due assegnate (*operazione di composizione*). Le grandezze tra le quali è possibile effettuare queste operazioni di confronto e composizione sono dette tra loro *omogenee*.

Si può facilmente supporre che queste due idee primordiali di confronto e composizione siano il risultato di un processo di astrazione prima e di generalizzazione poi, partito da alcune poche esperienze sensibili a tutti note. Basta infatti pensare a come sia spontaneo confrontare tra loro due bastoni o due fili, per decidere «quale è il più lungo», oppure come sia naturale giustapporre due aste per ottenere una terza che sia «somma» delle prime due. In entrambi i casi si hanno dei processi *intuitivi*, spontanei, di validità legata ad una esperienza limitata, che vengono poi razionalizzati attraverso la struttura formale di un sistema di assiomi valido per una classe ben più ampia e generale di enti.

Per quanto riguarda le proprietà di cui l'operazione di confronto deve godere, va notato che tale operazione conduce sostanzialmente alla realizzazione di relazioni transitive: invero se il confronto conduce a verificare la uguaglianza, viene costruita una relazione ovviamente transitiva; se il confronto conduce a stabilire che una delle grandezze è maggiore di un'altra di quelle confrontate, ancora una volta viene stabilita una relazione che è transitiva.

Più complesso è invece il problema legato alla operazione di composizione. Le proprietà che si vogliono attribuire a questa operazione, oltre che tener conto del processo di evoluzione «dal concreto all'astratto» più volte ricordato, dovranno anche essere fissate in modo coerente con quello che è il traguardo finale di tutta la teoria delle grandezze, cioè il momento della *misura*.

§ 3. L'OPERAZIONE DI MISURA

Analizziamo ora le possibili fasi successive di questo processo che porta dalla operazione di *confronto* tra grandezze, alla *codifica* che di questo confronto può farsi con gli enti aritmetici. Si tratta in questo caso di un successivo processo di formalizzazione che, prendendo l'avvio dal *concreto*, costituito in questo caso dalle grandezze, lo rappresenta con altri *strumenti formali* «astratti» che sono i numeri.

Questa operazione di rappresentazione viene spesso condotta a compimento mediante un confronto, ma ottiene risultati di un livello ben superiore. Infatti, se ci fissiamo per il momento sull'esempio delle lunghezze dei segmenti, la operazione di misura richiede che si scelga una grandezza campione (un segmento, nell'esempio considerato) e che si stabilisca un insieme di operazioni in base alle quali il confronto con il campione ed i suoi sottomultipli dia luogo ad un numero (razionale).

Di conseguenza la grandezza in questione viene rappresentata a molti effetti da un simbolo (numero), che permette di conoscerla e di prevedere il risultato delle operazioni materiali che vengono eseguite sulle grandezze.

Così, per esempio, quando si siano misurati due segmenti (ovviamente con la medesima unità di misura) la misura del segmento che si ottiene facendo la «somma» dei due, cioè ponendoli uno di seguito all'altro sulla medesima retta, è la somma dei due numeri che sono le misure dei segmenti addendi. Si ottiene così quell'isomorfismo, tra le operazioni materiali sulle grandezze e le operazioni sui simboli che le rappresentano, di cui si è già detto nel precedente § 1. Tale isomorfismo è una delle principali ragioni che giustificano il successo della matematizzazione della realtà, cioè dell'impiego dei numeri ed in generale dei simboli della matematica per rappresentare la realtà e per dedurre delle proprietà di questa dalle rappresentazioni utilizzate e dalle loro leggi formali.

Il processo ora descritto è la formalizzazione più naturale di quella attività concreta abituale che è, ad esempio, il prendere una misura contando il numero di spanne o di passi necessari per andare da un punto ad un altro. Abbiamo dunque qui un altro esempio di quell'evoluzione *dal concreto all'astratto* di cui si è più volte parlato.

Ma anche il secondo momento fondamentale nella educazione matematica, cioè il passaggio *dalla intuizione alla espressione* (cfr. § 4, cap. 1 di questa seconda parte) trova nella operazione di misura una significativa esemplificazione. È infatti del tutto intuitivo misurare una distanza contando come abbiamo detto, ad esempio, un passo dopo l'altro. Al momento di esprimere formalmente questa intuizione ci si pone però il problema di quale proprietà dobbiamo disporre per poter correttamente realizzare la nostra intuizione. Ci si accorge così che occorre in primo luogo saper confrontare tra di loro i passi: perchè la operazione di misura abbia un significato, occorre che i *passi siano tutti uguali*! Inoltre è necessario avere un criterio per poter aggiungere, ad ogni passo, il successivo. Ci necessitano cioè quelle due operazioni di confronto e composizione di cui parlavamo in precedenza.

Vediamo così che la teoria formale delle grandezze è il risultato di diverse esigenze e suggestioni. Da una parte essa risente di taluni aspetti delle esperienze concrete che l'hanno suggerita, dall'altra è costruita in modo da essere utilizzabile in quell'ulteriore formalizzazione che è la misura. Ritroviamo così un altro esempio di quella libertà creativa riconoscibile alla base di ogni teoria formale astratta, di cui si è parlato nel § 2 del cap. 4 della parte prima di questo volume. Ritroviamo, in altre parole, una ulteriore occasione di educazione al passaggio *dalla creatività alla razionalità*, come indicato nel § 5 del cap. 1 di questa parte seconda del volume.

§ 4. LA MISURA COME COMUNICAZIONE

Già nel § 1 abbiamo notato che uno degli aspetti rilevanti della attività di misurare è quello di rendere possibile la comunicazione non ambigua di determinate informazioni. L'eliminazione della ambiguità è dovuta in primo luogo alla univocità delle nozioni assiomatizzate (cioè rigorose!) di grandezza e di misura. Va però osservato che, come abbiamo detto, l'operazione di misura di una grandezza presuppone la scelta di una grandezza campione, che viene chiamata «unità» di misura. Tale scelta è arbitraria e non discende da alcuna legge intrinseca della natura. La prova di ciò è la enorme varietà delle unità di misura che, durante la storia umana ed anche al presente, sono state e sono utilizzate; basti pensare alle unità di lunghezza: piedi, pollici, yarde, miglia, tese, palmi, cubiti, ecc., ed alle unità di misura dei pesi: oncia, grano, carato, grammo, ecc. L'impiego di ognuna di queste unità è perfettamente legittimo, ai fini della conoscenza e della deduzione di proprietà delle grandezze.

Tuttavia appare abbastanza chiaro che l'impiego della codificazione numerica delle grandezze risulta via via più comodo per la comunicazione tra uomini, quanto più le unità convenzionali sono diffuse ed usate da un maggior numero di uomini, per la pratica quotidiana, per la tecnica e per la scienza.

Si tratta, ripetiamo, di una questione di opportunità più che di una questione di concetti; tuttavia, poiché tali unità esistono e sono state scelte dopo lunghi studi e dopo lunghissime trattative internazionali, e le convenzioni per indicarle sono pure state oggetto di convenzioni internazionali, vale la pena di imparare ad utilizzarle bene, in modo da risparmiare il più possibile la fatica della trasmissione delle informazioni ed anche i possibili pericoli di deformazione di queste.

NOTA STORICA

A titolo di complemento ricordiamo che, storicamente, la introduzione del metro per la misura della lunghezza è dovuta all'opera di scienziati francesi, i quali misurarono il più lungo percorso possibile sulla Terra (che è il meridiano terrestre), presero in considerazione il quarto di questo percorso (che corrisponde per esempio alla lunghezza di una strada che andasse da un punto qualunque dell'Equatore ad uno dei poli seguendo il percorso più breve) e lo divisero in un milione di parti.

Essi chiamarono «metro» quasto segmento, dalla parola greca «metrèin» che significa «misurare»; la diffusione delle idee politiche della Rivoluzione francese portò di conseguenza anche la diffusione delle convenzioni di misura che erano state proposte dagli scienziati francesi, che proposero anche di adottare come unità di lunghezza anche i multipli ed i sottomultipli del metro, come oggi si usa. L'impiego di queste convenzioni fu largamente adottato anche da altre Nazioni civili ed oggi è quasi universalmente accettato: fanno eccezioni l'Inghilterra e molti altri Paesi di lingua inglese, che non vollero adottare questo sistema di unità di misura per ragioni politiche. Pertanto da più di un secolo l'umanità civile misura le lunghezze con convenzioni diverse, il che risulta molte scomodo per le comunicazioni, tanto scientifiche che pratiche; ma fortunatamente oggi il sistema metrico decimale va diffondendosi anche presso i Paesi di lingua inglese, e si spera che tra qualche tempo finalmente la umanità intera potrà intendersi con un solo sistema di convenzioni.

È da ricordarsi anche che l'idea degli scienziati francesi di prendere come unità di misura un segmento che avesse un significato concreto, legato alle dimensioni della Terra, dovette essere ritoccata: infatti si costatò che le misure del meridiano terrestre potevano essere migliorate in precisione, con il miglioramento degli strumenti di osservazione e di misura che si impiegavano. Pertanto, volendo conservare al metro la sua definizione originaria, di milionesima parte del percorso tra un punto dell'Equatore ed un Polo, la lunghezza del campione avrebbe dovuto essere ritoccata ad ogni miglioramento delle misure, con gravissimo disturbo delle comunicazioni e delle informazioni scientifiche.

Pertanto si preferì costruire un campione materiale del segmente unità di misura delle lunghezze; tale campione è depositato a Parigi in un Ufficio apposito, e ad esso, per convenzione internazionale (Convanzione del Metro, Parigi, 1875), si fa riferimento quando si debbano stabilire i campioni di lunghezza che esistono presso le varie Nazioni.

Attualmente, in base ad una risoluzione del 1960 della Conferenza generale dei Pesi e delle Misure (formata dai delegati di tutti gli Stati aderenti alla Convenzione Internazionale del metro) il metro è definito come la lunghezza uguale a 1.650.763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione entro i livelli 2 p 10 e 5 d 5 dell'atomo di Cripto 86.